



國立臺灣科技大學

電機工程系

碩士學位論文

學 號:M10207323

利用投影影像可逆性原理之斜面與曲面投影校正
技術

**Auto-Calibration of Projections on Inclined Planes and
Curved Surfaces Based on the Reversibility Principle of
Projected Image**

研究生：曾詠鈴

指導教授：鍾聖倫 博士

中華民國 104 年 08 月



M10207323



碩士學位論文指導教授推薦書

本校 電機工程系 曾詠鈴(TSENG, YUNG-LING) 君

所提之論文：

基於投影影像可逆性原理之斜面與曲面投影校正技術

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授：鍾聖倫

指導教授

鍾聖倫

104 年 7 月 23 日



碩士學位考試委員審定書



M10207323

指導教授：鍾聖倫

本校 電機工程系 曾詠鈴 君

所提之論文：

基於投影影像可逆性原理之斜面與曲面投影校正技術

經本委員會審定通過，特此證明。

學校考試委員會

委

員：

賈叢林

葉正聖

姚智原

鍾聖倫

指導教授：

鍾聖倫

學程主任：

系(學程)主任、所長：

吳啟瑞

中華民國 104 年 1 月 23 日

摘要

投影技術可擴展一般螢幕顯示器之外的顯示應用，像是空間藝術、擴增實境，以及死角減消應用等。一般投影時，為了不失真，需嚴格要求投影機正對投影幕。受限於擺設投影機與顯示幕之空間條件限制時，投影之前就必須先經過校正的前置處理，否則會有失真的現象。對於簡單斜面投影情境，電腦圖學的前置處理，可矯正非理想佈局下的失真狀況，然而對於更複雜的曲面投影，利用方格近似的作法就有精確度與計算量上的挑戰。據此，本論文採用投影影像可逆性原理發展應用到斜面與曲面投影平面上的校正技術，可逆性原理指的是：給定一任意投影幕 P 與任兩點： A 為投影點、 B 為觀測點。當由 A 點將一圖像 I 投向 P 而被 B 點觀測為呈像 I' 如果置換 A 與 B 上投影與觀測的角色，即由從 B 點逆向投影 I' 到原投影幕上，則在 A 點將觀測到其原先投影出去的圖像 I 。在此可逆性原理的基礎上，本論文分別就斜向以及曲面投影面的校正進行探討；相較於文獻上其他利用方格分割再取逆投影矩陣的作法，本「利用投影影像可逆性原理之斜面與曲面投影校正技術」方法所取得的校正模版直接反應投影點到投影面再到觀測點之間的關係，而免除計算時累進的誤差，以及在曲面投影的狀況下，相鄰方格可能無法緊密貼合的問題。除了以上理論基礎之外，本論文並實現「自動化斜面校正與曲面投影校正技術」的裝置與自動校正式，能夠在任曲面投影幕上展現無失真的投影效果。當作成果展現的一部份，我們利用此校正方法實現一牆壁上之斜面投影應用：隨視角調整之互動式虛擬實境投影技術。

關鍵字：投影校正、斜面投影、曲面投影、可逆性原理

Abstract

Projection extends much more display possibilities beyond what traditional monitors can offer. However, strict condition requiring the projector directly facing a plane screen needs be satisfied; otherwise, distortion will occur. Distortion occurs in incline plane projection where the projector is not facing in normal direction and more complicated in the cases when the screen is a curved surface. To compensate, a rectified pattern is needed as a pre-processing before an intended image is projected to ensure no distortion. Existing solutions for the inclined planes involve warp perspective operation; solutions for curved surfaces are by approximating the curve surface as a collection of small inclined planes or grids, rendering the rectification for curved surface a repetitive rectification process on each of these constituent inclined plane. Alternatively, this study proposes an auto-calibration approach based on the reversibility principle of projection image. To wit, the principle states that, if an image Im from point A is projected to a screen and observed as Im' by point B, then, by reversibility, when Im' is projected from B to the same projection screen, the original image Im will be observed at A. With the original image being a checkboard and A the point of observation and B the position for projection, we are able to calibrate rectification patterns for projections on both inclined planes and curved surfaces. In addition to mathematical support for this approach, this study also presents an automatic calibration solution that together with projector and camera setup calibrates rectification patterns for both inclined planes and curved surfaces. The auto-calibration process requires no repetitive matrix manipulations which are prone to numerical errors and ensures no overlaps or gaps among approximated grids. To demonstrate, rectified projections to inclined wall, corner of ceilings, and cylindrical surfaced buck are shown. The technique presented in this paper can also be extended to applications in interactive virtual reality, as is shown by the demonstration of Wallscape, an interactive viewer dependent wall projection technique.

Keywords: projection rectification, inclined plane projection, curved surface projection, reversibility principle

致謝

旭日逐漸東昇，剛破曉的天空猶如我現在的心情逐漸開朗，隨著手裡象徵著論文最後收尾的致謝逐漸完成，正意味著離開台科的日子正在倒數計時，我開始回想起這兩年來所發生的點點滴滴，想著第一次因為程式寫不出來、除錯不出來而在實驗室挑燈夜戰的第一晚；想著某一次終於好不容易將程式完成帶著頭昏腦脹卻有一絲異常興奮的腦袋走在回家的路上時，因為只專注於低頭時而撞樹的情景；想著第一次因為教授の後援支持與推薦和實驗室的夥伴兩人單獨踏上對岸的國度時，那興奮又忐忑的心情；想著在口試的前幾天都還沒完全定稿而預報又十分不順利使得內心一直處於非常煎熬的狀態下，但是在口試當天突然口齒伶俐、胸有成竹地順利完成口試的報告等等，這林林總總令人印象深刻的回憶實在不勝枚舉，讓人不禁驚嘆這兩年的光陰如此快速，但所發生的事情卻深刻地充實在每分每秒的角落，讓人無法忘懷！

截至目前為止我的一生中總是出現許多貴人，但這兩年的研究所生涯中，是我遇見最多貴人的時候，讓我心懷感激特別想一一感謝，第一順位感謝的人當然是我的指導教授鍾聖倫教授了，雖然教授總是開玩笑地說剛進研究所的我就像一張白紙什麼程式都還不會，但是經過教授一路以來耐心的訓練並在有困難時給予明確方向的指導之後，如今的我從學會許多程式的撰寫、管理整間實驗室到文書處理作帳的技巧，雖不敢說十八般武藝樣樣精通但是每樣事務都熟悉且上手，一路上也順利地完成許多重要的目標，真的十分感謝教授！再來，我要感謝家人尤其是我的父母，對於不論是學業或著生活上一路的支持，如今讓我能夠順利地拿到人生中最重要的人學士學位，真的是辛苦你們了！在未來有生之年裡我會努力做到回饋你們養育之恩的。

最後，我要感謝實驗室裡同時努力完成口試且同時畢業的戰友彥佑學長跟琮祐謝謝你們在我程式或是有疑惑的時候，給我許多建議並且幫助我解決並且度過許多難關，也希望在未來你們的事業能夠順利發展！還有實驗室裡的學弟們，謝謝你們對於學姐始終的愛護，尤其是我的小幫手柏鈞，特別在我的論文研究方面幫了許多大忙，希望在明年你們能夠順利完成碩士學位，就業順利！

目錄

摘要	i
Abstract.....	ii
致謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	ix
第一章、簡介	1
第一節、研究目的	1
第二節、文獻探討	2
第三節、論文貢獻	5
第四節、技術挑戰與本文架構	8
第二章、投影失真問題與斜向投影校正技術	10
第一節、影像投影失真問題	10
第二節、雙攝影機視覺系統	11
第三節、文獻上投影校正的方法	14
第三章、投影影像可逆性原理	19
第一節、可逆性原理描述	19
第二節、校正應用與電腦視覺的解釋	21
第三節、實務上的現實	22
第四章、斜面校正與曲面投影校正技術之自動化規程實現	26
第一節、校正環境的佈置	26
第二節、可逆性原理於實際校正應用簡述	27
第三節、自動化斜面投影校正流程	30
第四節、自動化曲面投影校正流程	33
第五章、應用與展示	37
第一節、攝影機校正	37
第二節、自動化斜面投影校正結果	47
第三節、自動化曲面投影校正成果	50

第四節、牆壁三夾角之近似校正	55
第六章、結論與未來發展方向	60
第一節、依可逆性原理所實現校正技術與文獻方法比較	60
第二節、改良的方向	64
參考文獻	66
附錄、字彙表	68

圖目錄

圖 1.1：對照不同投影面下的畫面失真情形	1
圖 1.2：取得校正模版針對投影失真進行校正後如同正向投影般的效果	2
圖 1.3：透過一般文獻的校正方法進行本論文中的影像命名流程	3
圖 1.4：投影影像可逆性原理	6
圖 1.5：基於可逆性原理之投影校正的目的	7
圖 1.6：自動化斜面投影校正與裝置設置示意	7
圖 1.7：自動化曲面投影校正與裝置設置示意	8
圖 1.8：攝影機/雙投影機系統架設示意	9
圖 2.1：投影機正向與斜向擺放投影於平面屏幕之投影效果	10
圖 2.2：曲面導致的不規則投影失真效果	11
圖 2.3：攝影機/投影機系統裝置架設示意圖	11
圖 2.4：攝影機/投影機系統之投影失真的校正步驟流程	12
圖 2.5：雙攝影機視覺的 Homography	12
圖 2.6：二維影像之間各點轉換可以用一個 3×3 的矩陣決定	13
圖 2.7：理想狀態下的斜面投影轉換校正方法流程示意	14
圖 2.8：特徵點擷取流程示意	15
圖 2.9：曲面投影校正之近似多個斜面校正的概念示意	15
圖 2.10：實際校正上面臨到校正結果不如預期	16
圖 2.11：單一平面投影校正流程示意	17
圖 2.12：曲面投影校正流程示意	18
圖 3.1：投影影像可逆性原理的現象	19
圖 3.2：光線折射可逆性原理示意	19
圖 3.3：任意觀測點下之投影影像可逆性原理示意	21
圖 3.4：基於可逆性原理之理想的投影失真校正流程	21
圖 3.5：基於可逆性原理之理想的投影失真校正流程與背後數學意義	22
圖 3.6：攝影機影像解析度不依產生之問題示意	23
圖 3.7：攝影機/雙投影機系統架設示意	24
圖 3.8：攝影機/雙投影機系統實際架設的限制	25

圖 4.1：校正環境的佈置與實際裝置圖	26
圖 4.2：可逆性原理理想的狀態下可以直接計算逆轉換	27
圖 4.3：影像中心平移解決解析度不同的問題之詳細步驟示意	27
圖 4.4：斜面校正之幾何關係計算示意	28
圖 4.5：斜面校正之自相似比例計算示意	29
圖 4.6：棋盤格演化為以時間為序列的點集	29
圖 4.7：自動化斜面投影校正流程	30
圖 4.8：自動化斜面投影校正之攝影機取像的實際操作示意	30
圖 4.9：自動化斜面投影校正之影像處理與特徵點偵測的處理流程	31
圖 4.10：自動化斜面投影校正之排序特徵點的處理流程	32
圖 4.11：自動化斜面投影校正之 $H_{\text{homography}}$ 與 H_{scale} 計算流程	32
圖 4.12：自動化斜面投影校正之取得校正模板(CT)與應用	33
圖 4.13：自動化曲面投影校正流程	33
圖 4.14：自動化曲面投影校正之特徵點偵測與定位之攝影機取像的實際操作示意	34
圖 4.15：自動化曲面投影校正之特徵點偵測與定位的影像處理流程	35
圖 4.16：自動化曲面投影校正之區塊之間的校正模板與合成之影像處理流程	35
圖 4.17：自動化曲面投影校正之 CT 實際應用於任意影像	36
圖 5.1：斜面校正之不同情況下攝影機校正流程的結果比較	39
圖 5.2：曲面校正之不同情況下攝影機校正流程的結果比較	41
圖 5.3：斜面校正時比較不同的投影位置下使用相同的 H_{scale} 的投影校正效果比較	44
圖 5.4：曲面校正時比較不同的投影位置下使用相同的 H_{scale} 的投影校正效果比較	47
圖 5.5：自動化斜面投影校正成果	49
圖 5.6：自動化斜面投影在不同觀測點下的校正成果	50
圖 5.7：自動化曲面投影校正成果	53
圖 5.8：自動化曲面投影在不同觀測點下的校正成果	55
圖 5.9：自動化曲面投影校正於牆壁三夾角的校正結果	58
圖 5.10：牆壁三夾角實驗校正後之任意投影影像之近似校正的結果	59
圖 6.1：影像結果比較	63

圖 6.2：與實景無接縫結合之擴增實境技術	64
圖 6.3：車用 AB 柱視角減消示意	65

表目錄

表 1.1：本論文中所使用的影像命名	2
表 2.1：文獻內自定義名詞的字彙表	16
表 6.1：依可逆性原理所實現之斜面投影校正與文獻方法比較	60
表 6.2：依可逆性原理所實現之曲面投影校正與文獻方法比較	61
表 6.3：依可逆性原理計算矩陣方法與傳統計算矩陣方法之效能分析比較	62

第一章、簡介

第一節、研究目的

隨著顯示技術以及人機互動技術的進步，影像呈現的技術已經發展到超越以往無法想像的境界。透過投影機可隨意調整並投射於任意表面上顯示的優點，除了讓使用者比觀看一般平面顯示屏幕時，更具有壯觀的視覺享受。由於投影機體積小、易於攜帶的特性，加上由攝影機偵測投影畫面，與後續影像處理技術的配合使用，可以適當地調整投影機的投影畫面，使得應用上更能因地制宜。

在使用投影機時，當投影機與投影面之間的相對位置為任意擺放或投影面為任意形狀時，投影畫面會產生失真現象，如圖 1.1-(a)，當投影機以斜向擺放對著一個平面屏幕，而投射一組棋盤格時，因為投影機與平面屏幕並非正交擺放，所以會造成投影畫面上的梯形失真(Keystone Distortion)，如圖 1.1-(b)中，當投影機投射於如汽車AB柱這樣的曲面或不規則面上時，投影畫面會因為投影表面的曲率不同而呈現不規則的失真。

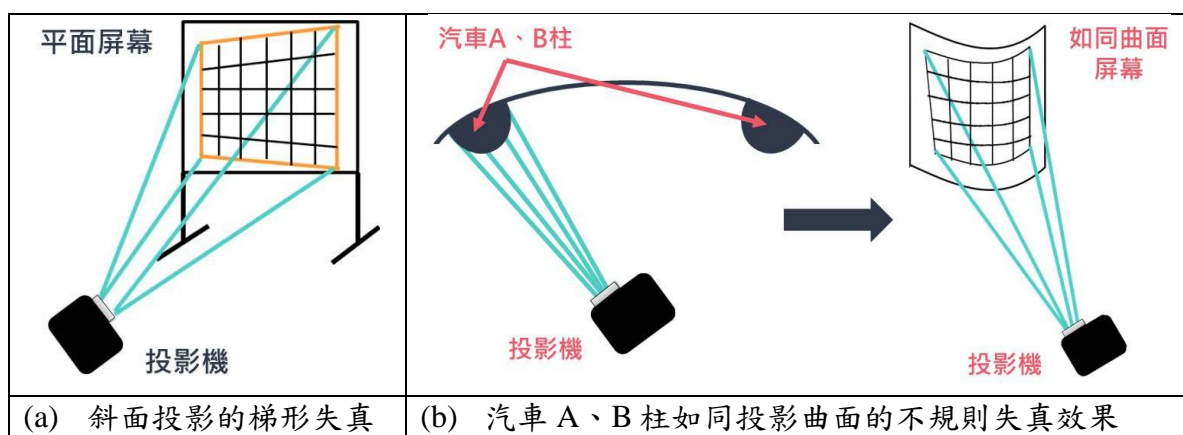


圖 1.1：對照不同投影面下的畫面失真情形

為解決上述失真現象，我們將運用影像處理技術，計算出一個具有抵消失真影響能力的校正模板，用來預處理投影機所要投射的影像，使失真影像能經由校正模板進行校正。從圖 1.2可知，當斜面投影所造成之梯形失真經由上述的方法投影校正後，觀看者所看到的校正畫面會如同正向投影般的效果。

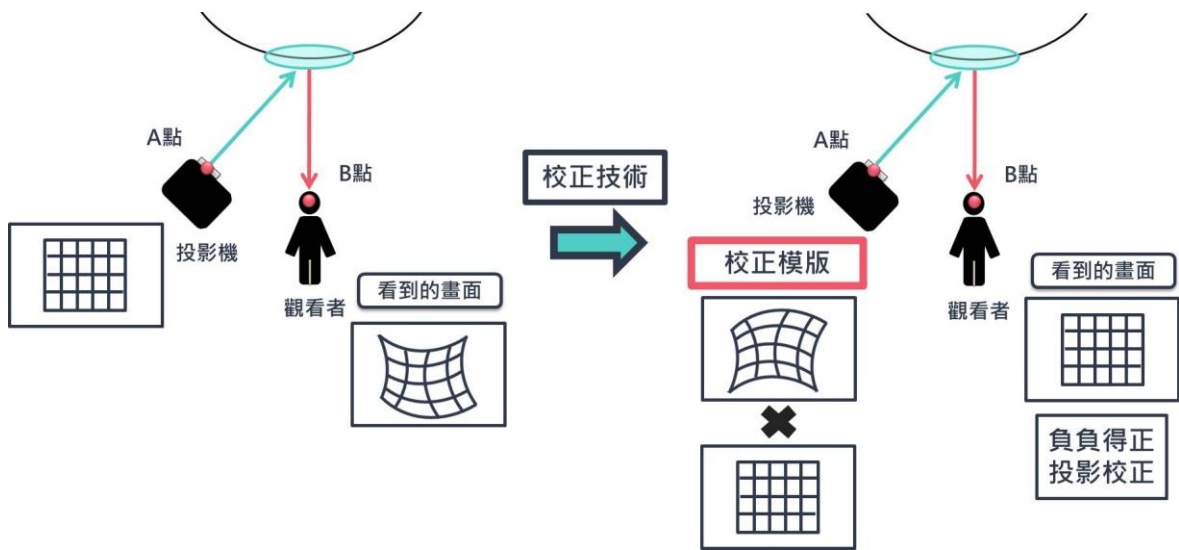


圖 1.2：取得校正模版針對投影失真進行校正後如同正向投影般的效果

最後，本論文的目的，就是解決投影失真的校正問題。投影影像的可逆性原理，簡化一般文獻上計算校正模版的程式流程，同時改善現有文獻中在投影校正時所遇到的問題與缺點。

第二節、文獻探討

表 1.1：本論文中所使用的影像命名

英文全稱(縮寫)	中文定義
Input Image(II)	任何一張欲投影的影像
Standard Template(ST)	標準模版，於本論文中為標準的矩形或黑白棋盤格影像
Output Image(OI)	經過校正模版(CT)所處理過的影像
Camera Image(CI)	針對投影失真所拍攝的攝影機影像，代表觀看者看到的影像
Distortion Region(DR)	攝影機影像(CI)中的投影失真區域
Correction Template(CT)	校正模版，通常為經過影像處理後內含校正資訊的四邊形或棋盤格影像
Warping Image(WI)	影像處理過程中經由 OpenCV warpPerspective()所處理過的影像
Corrected Camera Image(CCI)	投影失真區域(DR)經過校正後的攝影機影像，代表觀看者看到的影像

經由分析一般文獻[7] 上所使用的校正流程，首先針對本論文中所會用到的影像進行命名。根據圖 1.3 中斜面投影標準的校正流程所示，藉由投影一標準模板(ST)於平面屏幕上，另一方的攝影機拍攝後，我們會看到投影失真的區域(DR)呈現於攝影機影像(CI)中。本論文假設CI代表人眼觀點下所看到的影像，再利用程式計算出含有抵銷失真影響的轉換矩陣與校正模板(CT)，最後輸入任意一張欲投影的影像(II)，透過CT的處理得到一張輸出影像(OI)，OI經過投影轉換與攝影機成像後，將會看到一張DR被校正的攝影機影像(CCI)。如表 1.1 所示，本論文中會使用到的影像名稱與相關定義的列表整理。

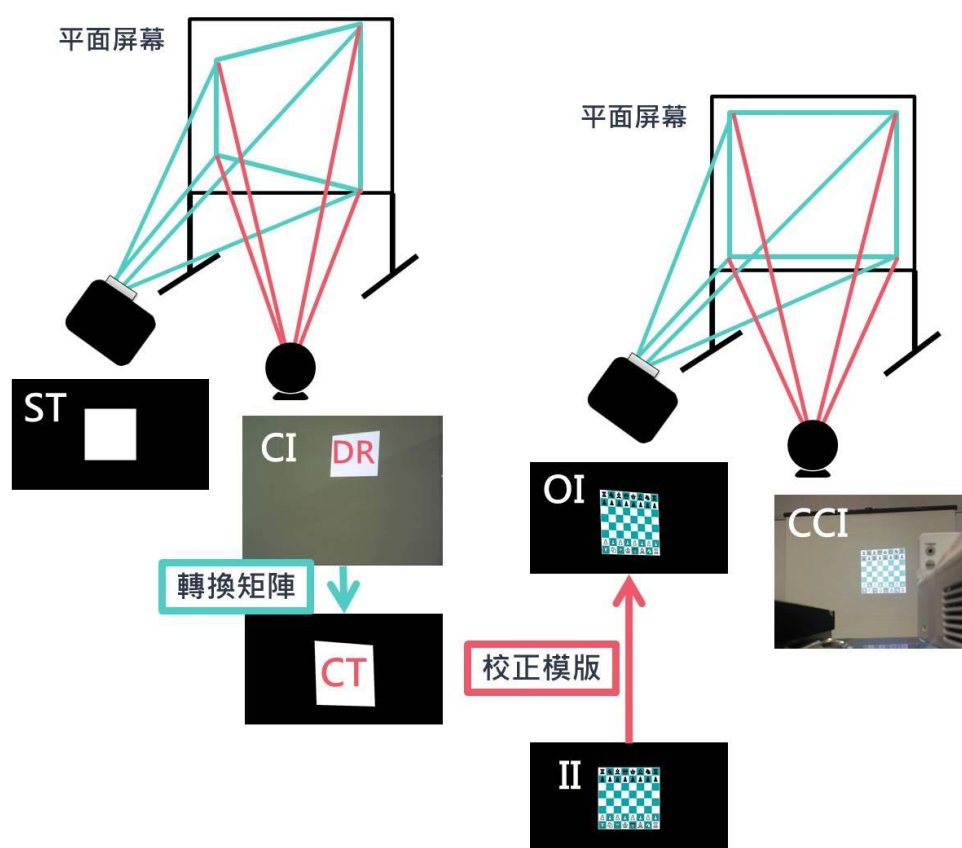


圖 1.3：透過一般文獻的校正方法進行本論文中的影像命名流程

透過加入一台攝影機針對投影機的投影失真進行校正，我們將這樣的系統稱為投影機/攝影機系統，本論文就投影機/攝影機系統下於任何投影面校正的相關研究有：Raskar[1] 利用攝影機對與棋盤格的輔助，針對單一投影機所投影於屏幕上的投影範圍，經由三角測量法得出表面幾何資訊，並以貼圖於三角網格的方式將想要投影的影像投射上去進行校正；Raij 與 Pollefeys[2] 利用 2D 攝影機影像與 3D 位置之間的

轉換關係計算出 3D 物體的位置，來校正失真的投影影像。

針對另一種雙平面的類型進行投影失真校正，此投影面之間雙平面的夾角接近於正交，而 Ashdown[3] 的研究中主要是針對兩平面之間的夾角所造成的不規則失真進行校正，剛好類似於本論文第五章的應用與展示中，牆壁三夾角的不規則面投影校正實驗；Brown[4] 提出的方法則允許裝置之間可任意擺放，且之間的相對位置可經由攝影機與棋盤格的校正來定位，讓使用者可以在任意的地方，像是辦公室、會議室、劇院或者是客廳使用，大大地擴展投影的適用情境；Sajadi[5] 提出利用單一攝影機取像，搭配棋盤格的輔助，經由重建屏幕表面幾何資訊來校正攝影機與投影機，以達到對於曲面屏幕影像校正與多重拼接的效果。

特別針對車用安全的應用，Tachi 與 Inami[6] 曾經提出利用 Retroreflectors 作為顯示的媒介，可將投影機的光線反射到特殊設計屏幕(Retroreflective Screen)的座位上，讓觀看者可以看到車外的景象，假如今天有人坐在位置上時，擋住屏幕的顯示時，另外經由車內天花板架設另一個 Retroreflector 反射到 half mirror 上，駕駛也可以看到車外的景象。

在國內的相關研究當中，莊明穎[7] 的論文描述在一般使用攝影機/投影機系統進行校正時，會遇到的基本問題與所用到的數學概念：從相機成像到建立影像之間的單應性矩陣(Homography matrix)，以計算失真區域內最大內接矩形的方式進行投影校正。另外，就國內近年來具有代表性的投影校正技術來看，本論文深入探討沈駿騫[8] 的論文中關於斜面與曲面的校正技術研究：校正的技術重點在於經由計算出失真區域裡的最大內接矩形(MIR)，以解決攝影機影像實務上的投影平面對齊問題，特別在曲面投影校正時，透過投影水平線與垂直線來偵測出影像中的特徵點並於後續進行排序，目的在於計算出各棋盤格失真前後相對應的逆轉換關係，以進行區塊之間的校正。於計算的過程中常會因為影像處理的採樣誤差，導致經過逆轉換處理後的影像中區塊之間呈現空洞不連續，因此需要透過影像的修正來解決。

就現行所使用的投影校正方法中，最終的目的在於如何從作為觀察者的攝影機，其影像所提供的資訊找出能夠抵銷失真影響的校正模板(CT)，而 CT 背後的數學意義來自於投影前的影像與攝影機影像之間 Homography 的關聯性，藉由 Homography 我們就可以計算得知投影失真的影響來自於哪裡？並且可以計算出相對應抵銷此失真影響的 Homography Matrix 反應於 CT 上。因此，透過下列相關文獻將能深入瞭解 Homography 與 Homography Matrix 的數學意義與相關應用：Hartley and Zisserman[9]

提供 Homography 的基本定義為 P^2 到 P^2 的轉換，而 P^2 代表二維的投影空間 (Projective Space)，並經由攝影機針孔成像的數學模型為出發，計算出之間的 Homography Matrix；Zhang[10] [11] 藉由棋盤格的輔助，該文獻將棋盤格中其格線的交錯點視為特徵點，計算不同攝影機影像中特徵點座標之間的轉換關係來作攝影機的定位，以此針對攝影機的畫面進行校正，該校正方法是從攝影機針孔成像的數學模型為出發點，推導出於不同的透視轉換下影像間相同特徵點的 Homography；Dubrofsky[12] 藉由探討 Homography 與其他幾何轉換之間的相關性，並介紹關於 Homography Estimation 於多種不同特徵型態上的演算法與應用，最後簡介幾種現行可使用 Homography Estimation 的軟體；Denton and Beveridge[13] 針對影像特徵點所對應的 Homography Matrix 提供詳細的求解方法。

在曲面投影校正時，常利用棋盤格針對不規則失真作區塊之間的分割校正，因此在計算 Homography Matrix 之前，特徵點的定位與對應非常重要，Kooima[14] 透過濾波器偵測出棋盤格內部交錯點的整體法向量與起始法向量之間的角度，藉此計算目前攝影機的位置與鏡頭方向，並搭配多種影像處理的方式，來針對各種不同面向之下，攝影機所觀察到的棋盤格進行特徵點偵測並將其排序、定位編號，給予日後影像校正使用。

本論文自動化投影校正流程的程式架構中，主要使用 OpenCV 來進行特徵點偵測的影像處理，利用 OpenCV 針對影像前後景的處理，分割出攝影機影像中 DR 的位置，以利後續的特徵點偵測。Laganière[15] and Kenneth[16] 提供相關函式來計算畫面中相連區域與偵測擷取影像中的特徵點座標。透過輸入相對應的特徵點座標於函式 WarpPerspective() 中，以求出影像之間的 Homography Matrix，最後針對輸入的畫面進行透視轉換後，來輸出扭曲的畫面。

第三節、論文貢獻

本論文中最主要的貢獻在於提出一個十分重要的定理：投影影像可逆性原理，其原理來自於一個我們於投影校正時所觀察到的現象，內容如圖 1.4 所示，假如將一個輸入影像(II)利用攝影機從 A 點投影到一任意的投影面上，反應此投影面以及由 A 點過來投影關係，在空間中 B 點攝影機則會看到一個攝影機影像(CI)。

而此投影影像可逆性原理指的是：在理想的狀態下根據可逆性原理，如果由B點沿著原觀測方向，利用投影機向原投影面投影其攝影機所觀看到的CI，則A點上的攝影機沿著原投影方向看投影面時，就會剛好看到原來的輸入影像(II)。



圖 1.4：投影影像可逆性原理

假設有一觀看者於 B 點想要看到一個正常的棋盤格影像，則從 A 點須投影如何的影像方能達到此效果呢？如圖 1.5 所示，根據投影影像之間的可逆性原理，置換 A、B 點的角色關係，經由 B 點投影一個正常的棋盤格影像於此投影面上，於 A 點則會接收到一不規則失真的影像。因此，如果由 A 點沿著原觀測方向向原投影面投影所接收到的不規則失真影像，則 B 點沿著原投影方向看投影面時，就會剛好看到一個正常的棋盤格影像，如此就可以達到影像的校正。同理可知，針對不同觀點下的失真圖像，只要能取得相對應之接收圖像，都可以經由投影影像可逆性原理進行校正。

而投影影像可逆性原理於投影校正的最大貢獻在於，有別於現行文獻的方法是先找出失真影響再計算相對應抵銷此影響的 Homography Matrix，本論文是直接計算出能夠抵銷失真影響的 Homography Matrix 的方式進行計算。

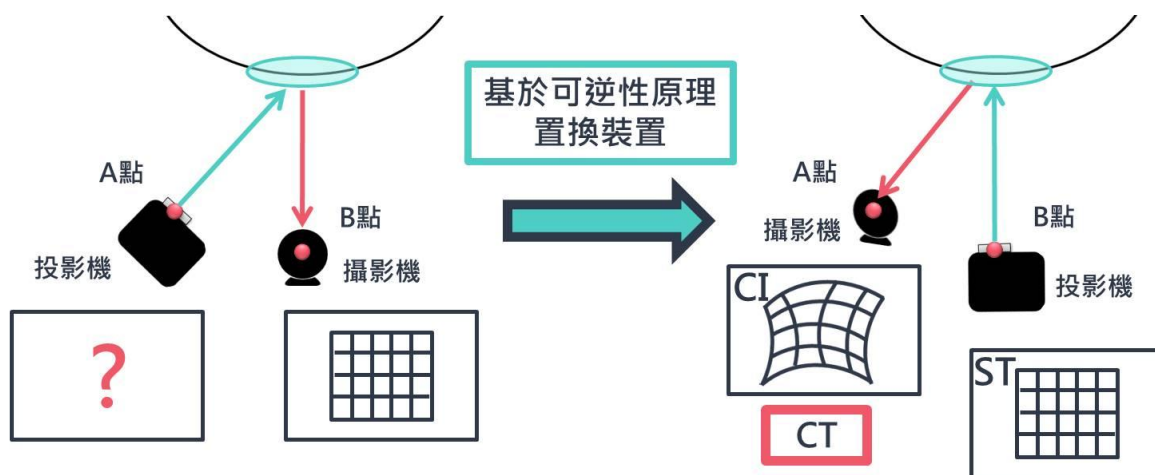


圖 1.5：基於可逆性原理之投影校正的目的

斜面投影校正時基於可逆性原理的系統架設下，如圖 1.6 所示，原本投影機 P 因為斜向投影於平面屏幕而造成畫面的梯形失真，透過加入攝影機 C 與投影機 P' 等校正裝置，取得具有校正資訊的攝影機影像(CI)，CI 經由影像處理、特徵點擷取等步驟，計算出一個具有與畫面失真相對應的校正模板(CT)，針對欲投影的任意影像(II)進行預處理，再次投影後使得原本於攝影機畫面中看到的投影失真影像被順利校正 CCI，

本斜面投影校正技術的最大貢獻是不必經由複雜計算，而是直接透過多影像之間的特徵點對應來算出所需的 Homography Matrix，並透過自動化的流程直接解決斜面投影失真，雖然在實際應用上將面臨若干挑戰，但在本論文後半段中都會有相對應的解決方法。

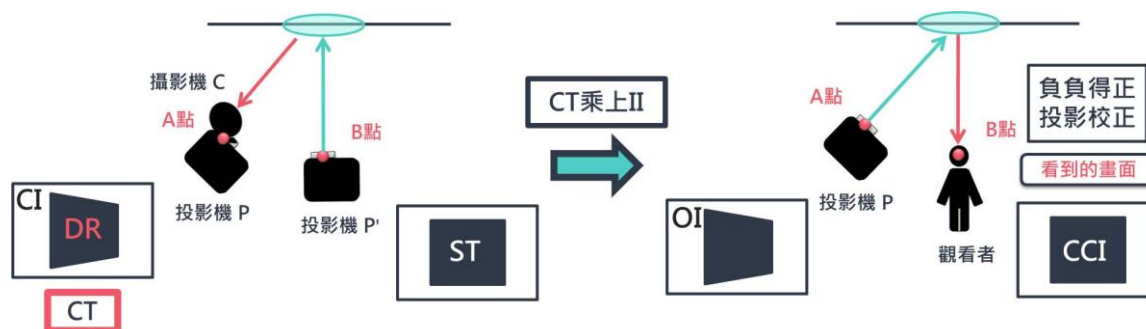


圖 1.6：自動化斜面投影校正與裝置設置示意

而在曲面投影校正時，同樣基於可逆性原理的系統架設下進行自動化流程的校正，但有別於斜面投影校正的單純，需經過棋盤格中區塊之間的分割與對應才能有效針對不規則失真進行校正。因此，如圖 1.7 所示，本曲面投影校正技術最大貢獻

是如何透過有效率的攝影機取像方式，讓原本需要經過大量排序的不規則棋盤特徵點，不須增加另外的演算法，直接按照影像處理順序即可馬上排序對應計算出區塊之間所需的 Homography Matrix。

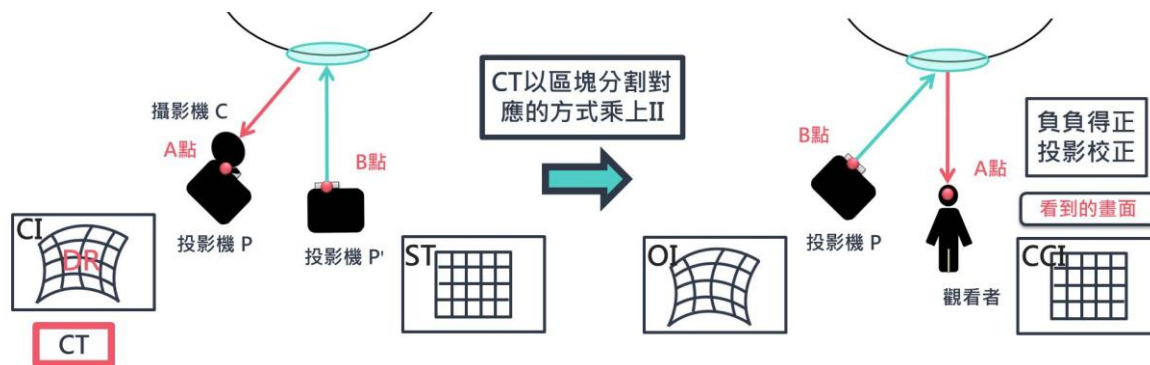


圖 1.7：自動化曲面投影校正與裝置設置示意

第四節、技術挑戰與本文架構

本論文中所面臨的技術挑戰依序有三個層面：第一個層面，實際投影機的投影範圍是有所限制的，而在所有現行文獻的校正技術中，是以先找出失真影響的關係，再計算出相對應能抵銷此影響的 Homography Matrix 來進行校正，若沒有控制好 Homography Matrix 的參數則會造成最後校正出來的畫面超出顯示範圍。因此為了得到校正後於投影畫面中最大的顯示效果，一般文獻上利用計算投影失真區域內最大內接矩形(MIR)的方式進行投影校正，因此不考慮最後顯示畫面的比例，則有時會發生比例失衡的情況。

第二個層面是現有文獻上所遇到計算誤差的問題，由於是先找出失真影響的關係再計算出相對應能抵銷此影響的 Homography Matrix 的方式進行校正，多步驟的計算下有極大的機率會產生後續計算誤差的問題，特別是在曲面投影校正上，誤差問題將使校正結果畫面中會有區塊之間空洞不連續的問題，導致校正後顯示的效果不佳。

第三個層面，則是基於投影影像可逆性原理的系統架設下所延伸出來於實作上的問題，第一個問題是因為本論文中所使用的裝置關係，而產生攝影機解析度(1280X960)與投影機解析度(1920X1080)不一致的關係，需要後續的個別調整；第二個問題，如圖 1.8所示，本論文的系統架設方法是於投影機P的正上方疊加一個攝影機C，實現基於可逆性原理以不須經過置換裝置的方式，攝影機C可以直接用來觀察

CT，但實際上投影機P與攝影機C之間的鏡頭位置並非相同，導致由投影機P鏡頭位置及從攝影機C的鏡頭位置所看到的CT不會一樣，因此後續還需要進行額外的攝影機校正。

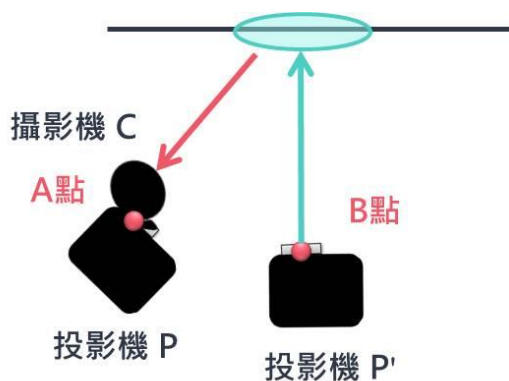


圖 1.8：攝影機/雙投影機系統架設示意

本論文的架構如下：

第二章:介紹在投影機於各種不同情形下的投影失真，藉由分析之間 Homography 的關聯性進行投影失真的校正，並探討、分析現有文獻校正的理論基礎、解決方法以及可以改善之處。

第三章:首先介紹本論文中最重要的校正理論基礎-投影影像可逆性原理，最後解釋其背後數學意義並於實務應用上會面臨哪些問題需要解決。

第四章:介紹基於投影影像可逆性原理來進行自動化投影校正。

第五章:展示本論文應用於不同投影面上的校正結果。

第六章:主要條列出可逆性原理與現有文獻的校正方法，比較兩者之間的校正步驟與優缺點，並提出本論文技術在未來的改良方向。

第二章、投影失真問題與斜向投影校正技術

本章節的內容首先介紹透過分析斜面與曲面上的投影失真現象；再來探討攝影機與投影機系統背後的數學意義；定義影像之間的 Homography 以計算出投影校正用的校正模板(CT)；最後探討現有文獻上針對斜面以及曲面等校正方法與本論文中可以改善的缺點。

第一節、影像投影失真問題

使用投影機時，當投影機正對平面屏幕投影一張標準網格影像時，所看到的網格影像無任何改變；而當投影機變成斜向擺放投射時，原本所看到的投影畫面會變成左窄右寬的形狀，本論文將這樣的現象稱為梯形失真(Keystone Distortion)，這是因為隨著投影機與平面屏幕之間的相對位置改變，導致光線從投影機光源發散到平面屏幕之間的距離產生變化，造成失真變形，如圖 2.1 所示。

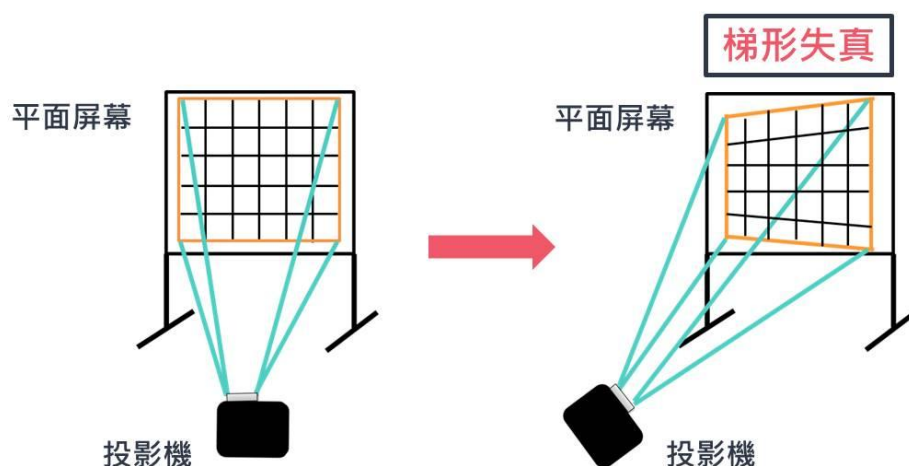


圖 2.1：投影機正向與斜向擺放投影於平面屏幕之投影效果

當投影面由平面屏幕替換為曲面或不規則面時，因為表面形狀的曲率不同使得投影畫面呈現不規則的扭曲變形。如圖 2.2 所示，當投影機斜向投影一張棋盤格狀的影像到一個曲面屏幕時，觀看者所看到的投影畫面呈現不規則的失真。

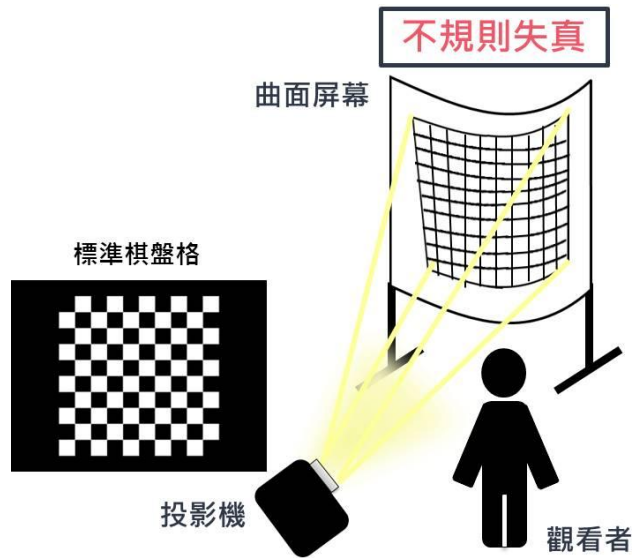


圖 2.2：曲面導致的不規則投影失真效果

第二節、雙攝影機視覺系統

針對上述的投影失真問題，於現行文獻中[7] 以加入攝影機的方式進行失真的校正，如圖 2.3 所示，利用攝影機針對投影失真的畫面取得背後的校正資訊進行校正。

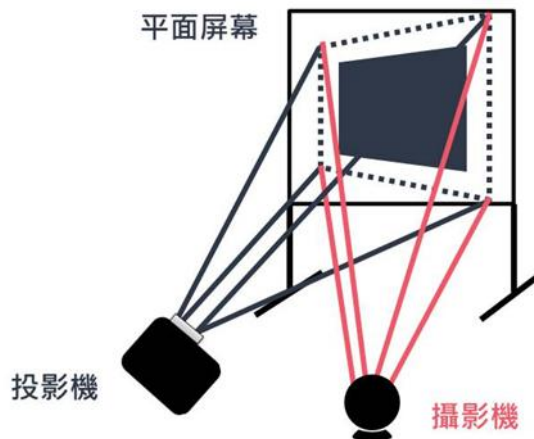


圖 2.3：攝影機/投影機系統裝置架設示意圖

如投影校正技術的最終目的在於，透過攝影機對投影失真畫面的取像，利用其影像所提供的資訊找出能夠抵銷失真影響的轉換矩陣，來抵銷因為投影轉換而失真的影響達到校正的目的如圖 2.4 所示[7]。



圖 2.4：攝影機/投影機系統之投影失真的校正步驟流程

關於轉換矩陣背後的數學意義闡述，如圖 2.5 所示，假設空間中有一個物體與兩個固定的視點 Q_L 、 Q_R ，若將 Q_L 、 Q_R 視為兩台攝影機分別朝著空間中的物體拍攝，經由攝影機成像出來兩張影像，則兩者影像之間存在著一個 Homography 的關聯性，而基於這樣的關聯性之下，可以用一個 Homography Matrix(H)[10] 來決定其影像之間各個座標點的轉換，稱之為「雙攝影機視覺」。

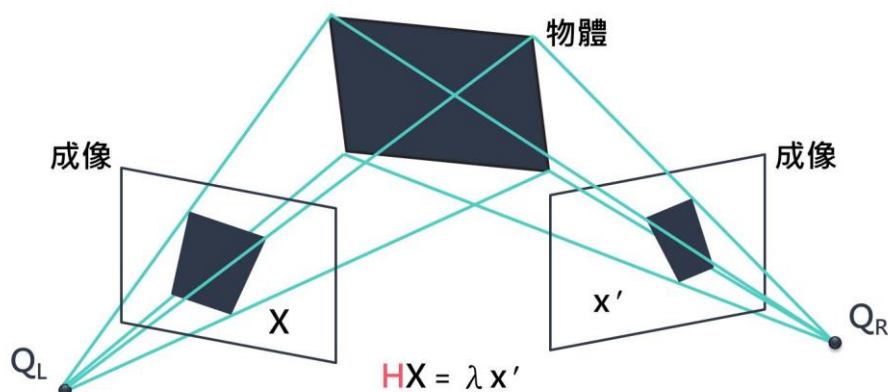


圖 2.5：雙攝影機視覺的 Homography

假如將 Q_L 改為一台投影機的投射，上述攝影機所成像之影像就可以視為投影機投射出去的影像，而空間中的物體可以視作投影機投影出去的畫面，再由另一端 Q_R 上的攝影機拍攝到一張包含由 Q_L 所投射出來畫面的影像，藉此這樣的相互對應之下可知一般文獻上所使用的投影機/攝影機校正系統也是屬於雙攝影機視覺的一種，這也表示投影機所投影的輸入影像與另一端攝影機所看到的成像，兩者影像之間也具有 Homography 的關聯性，而用來抵銷失真影響的轉換矩陣也能藉此計算得知。

在實用上如圖 2.6-(a)可知二維影像之間的轉換關係可以用一個 3×3 的 H 來決定，

其中 $x'(x', y', 1)$ 與 $X(x, y, 1)$ 表示於不同影像中的座標點， X' 、 Y' 與 X 、 Y 各代表影像之間 x 、 y 軸的方向；另外就影像之間各個座標點的位移(Translation)、兩軸上的放大縮小(Scaling)或是旋轉(Rotation)等運算也可以從圖 2.6-(b)中相對應的 3×3 矩陣得到， d_x 、 d_y 代表 x 、 y 方向的位移量， S_x 、 S_y 代表 x 、 y 方向的形變量。

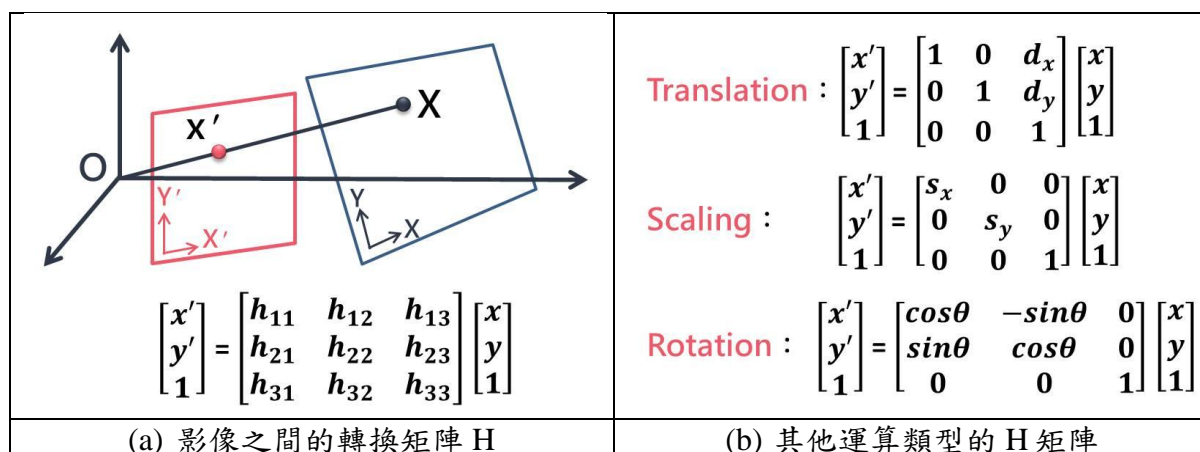


圖 2.6：二維影像之間各點轉換可以用一個 3×3 的矩陣決定

根據 Hartley and Zisserman[9] 的文獻描述， H 被定義為 P^2 到 P^2 的轉換，而 P^2 代表二維的投影空間，座標以齊次座標型態表示 $[\lambda x \ \lambda y \ \lambda]^T$ ，其中 λ 為縮放因子， H 為一個 3×3 的非奇異矩陣，但因為縮放因子 λ 的影響而具有 8 個自由度。而根據直接線性轉換(Direct Linear Transformation)可知投影平面上一個點 (x, y) 具有兩個自由度，因此至少需要四組點以上的對應關係才能決定出一個 H ，根據定義令 h_9 為 1：

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$(x, y) = \left(\frac{h_1 X + h_2 Y + h_3}{h_7 X + h_8 Y + h_9}, \frac{h_4 X + h_5 Y + h_6}{h_7 X + h_8 Y + h_9} \right) \quad (2.2)$$

由整理(2.1)式得出(2.2)式。因此，應用於投影校正之間的 Homography 計算時，一般具有四個頂點的矩形恰好可以求解一個 H ，而當影像中具有更多對應點時，例

如使用棋盤格的交錯點為特徵點時，就以最小平方法(Least Square Method)求得最佳解，以上詳細的求解方法可參考[12] 與[13]。

第三節、文獻上投影校正的方法

本章節先探討在不考慮影像之間的解析度不同以及校正之後畫面範圍的限制等等可能會對校正結果造成影響，由圖 2.7 可知，理想且直覺的斜面投影校正方法是先透過投影標準模版(ST)於屏幕上，經由攝影機影像中失真區域的特徵點偵測，這裡的特徵點指得是矩形的四個頂點，以計算出轉換矩陣 H 。再利用 H 來計算逆轉換 H^{-1} 得到一個反失真的四邊形作為 CT，針對每次欲投影的影像乘上 CT 做預處理的動作，再經由投影轉換、攝影機成像後，投影區域的失真被負負得正給抵銷，則在攝影機影像中看到一個理想的校正結果，CCI 指得是經過投影校正後攝影機所拍攝到的影像並可將其視為人眼觀點。

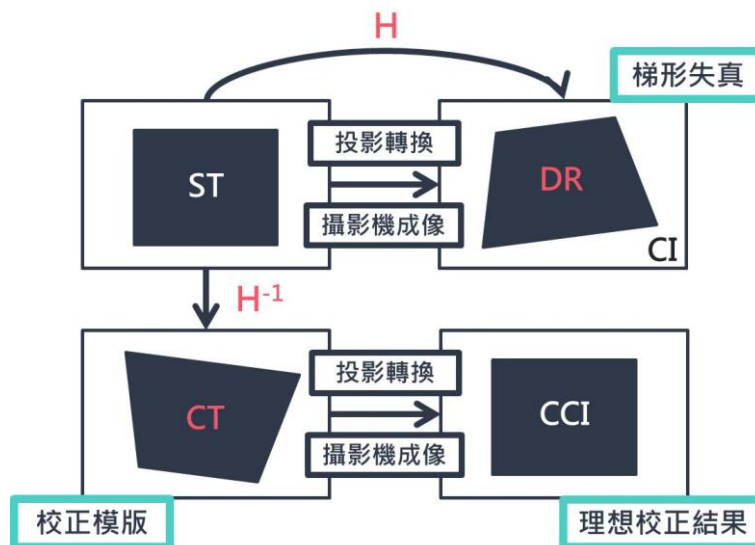


圖 2.7：理想狀態下的斜面投影轉換校正方法流程示意

這邊計算 H 之前先介紹如何透過影像處理擷取影像中的特定點座標，一般指的是矩形的四個頂點或棋盤格中的交錯點。如圖 2.8 所示，一般文獻上偵測特徵點之影像處理的方法順序為下列：

1. 先偵測出影像中的矩形區域。
2. 透過測邊處理搜尋邊上的四個角點(影像中像素變化急遽的點)。

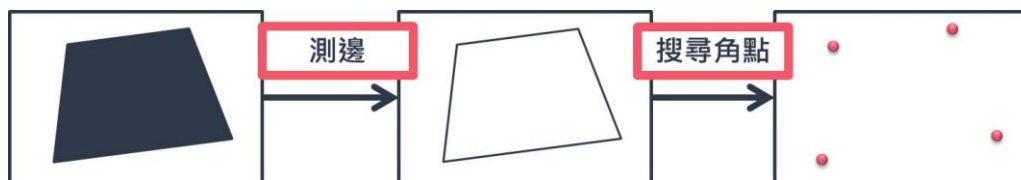


圖 2.8：特徵點擷取流程示意

將平面屏幕替換成曲面後所造成的不規則失真，無法只用一個矩形針對失真畫面作出有效的校正。如圖 2.9-(a) 所示，藉由投影黑白棋盤格為輔助，利用棋盤格每個區塊之間 H_{ij} (i : 列數, j : 行數, 表示網格之間對應的編號) 的逆轉換 H_{ij}^{-1} 計算得到一個棋盤狀的 CT，而欲投影的影像(II)經由 CT 的作用後，再經由投影轉換、攝影機成像於攝影機影像中看到一個理想的校正結果。因此，透過上述理想的校正流程可知曲面的投影失真校正是個近似多個斜面的校正。

由圖 2.9-(b)可知，藉由投影失真前後區塊之間的切割與特徵點的相互對應，以建立起多個不同區塊的 H_{ij} ，因此與斜面的校正流程相比，在結束特徵點的偵測之後，曲面投影校正還需要多一步排序特徵點的演算法設計。

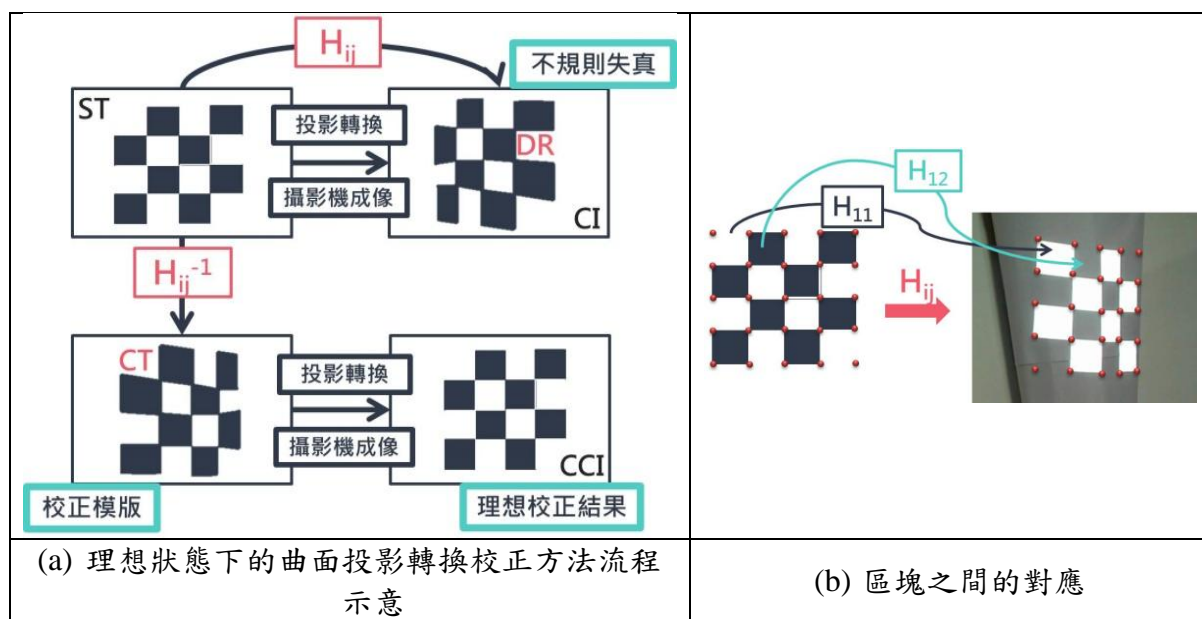


圖 2.9：曲面投影校正之近似多個斜面校正的概念示意

雖然透過上述的校正流程可以大致上瞭解在一般文獻上是如何進行校正的，但是在實際的應用上還是會遇到攝影機畫面無法直接使用的問題，這是因為實際上攝影機的投影範圍是有限的，而在所有現行文獻的計算下都是以先計算失真轉換的 H ，

然後再計算出能抵銷 H 的逆轉換來進行校正，如圖 2.10 所示，通常攝影機影像中的失真區域都比原本的影像範圍來得小，如果沒有控制好 H^{-1} 的量時就會造成最後校正出來的畫面超出投影機可以顯示的範圍。

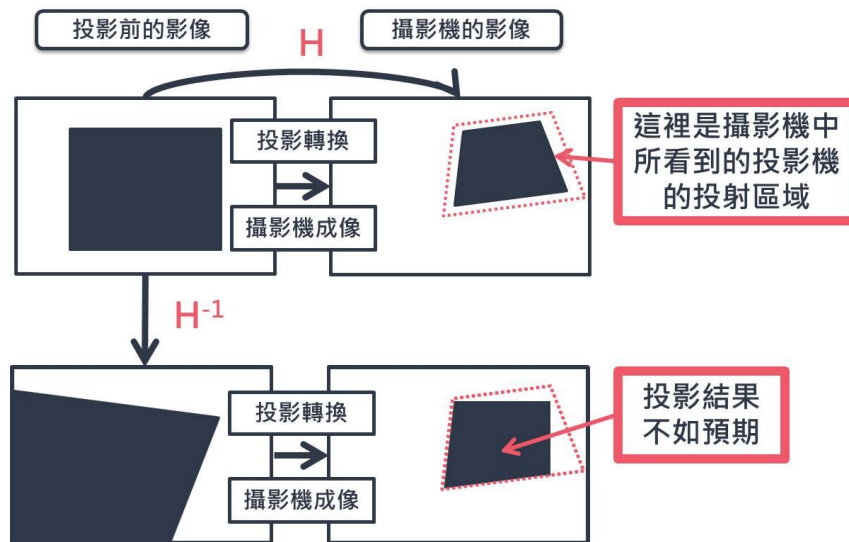


圖 2.10：實際校正上面臨到校正結果不如預期

藉此本論文於參考文獻中擷取一篇國內最具有代表性的文獻：沈駿寧[8] 的論文作投影校正的探討並於後續與本論文提出的方法作比較，文獻中提出幾個比較常見且在不同投影面上的投影失真校正。

表 2.1：文獻內自定義名詞的字彙表

The Input Image(II)	原始的圖像
The Uncorrected Image(UI)	由攝影機所看到的投影畫面範圍
The Warped Image(WI)	經處理後扭曲的影像
Maximum Inside Rectangle(MIR)	存在於 UI 中的最大矩形
T_1 、 T_1^{-1}	II 到 UI 之間的對應矩陣與逆轉換的對應矩陣
T_2	UI 到 MIR 之間的轉換矩陣
T_3	II 到 WI 之間的轉換矩陣
H_1	UI 到 MIR 之間的轉換矩陣
$H_{2\ hi\ hj}$ 、 $H_{2\ hi\ hj}^{-1}$	II 到 UI 之間各區塊間的的轉換矩陣與逆轉換的轉換矩陣

透過表 2.1 自定義出此文獻中會用到的名詞與解釋，並提出針對單一平面的梯形失真進行校正之方法，如圖 2.11 所示，經由計算出投影前後失真的轉換 T_1 ，並透過直線的偵測找出梯形失真區域 UI 內的最大內接矩形 MIR，MIR 的目的在於不讓經由能抵銷失真影響的逆轉換所處理的影像超出可投影的範圍，但又想要得到校正後最大的顯示效果，最後計算 UI 與 MIR 兩者之間的轉換 T_2 ，MIR 將由逆轉換 T_1^{-1} 計算出一個 WI 作為校正模版，找出原始圖像 II 與 WI 之間的轉換 T_3 ，針對欲投影的畫面進行投影前的處理。

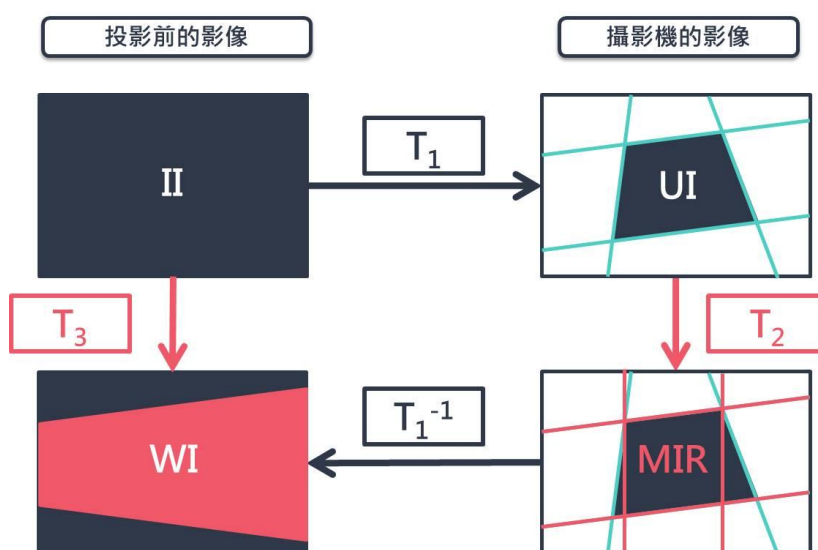


圖 2.11：單一平面投影校正流程示意

另外，就沈駿騫[8]的論文中引用針對曲面投影失真校正作比較，如圖 2.12 所示，經由計算出失真區域裡的最大內接矩形 MIR，與經由投影水平線與垂直線偵測出影像中的特徵點並進行排序，計算出各區塊間失真前後相對應的逆轉換關係 $H_{2 \text{ hi } h_j}^{-1}$ ，進行對應與校正。以區塊方式對不規則投影失真進行分區的校正，但是經過計算後逆轉換的誤差會造成區塊之間的頂點不對應，使得最後校正用畫面 WI 呈現空洞且不連續，因此在文獻中，還需再進一步作影像的修正。

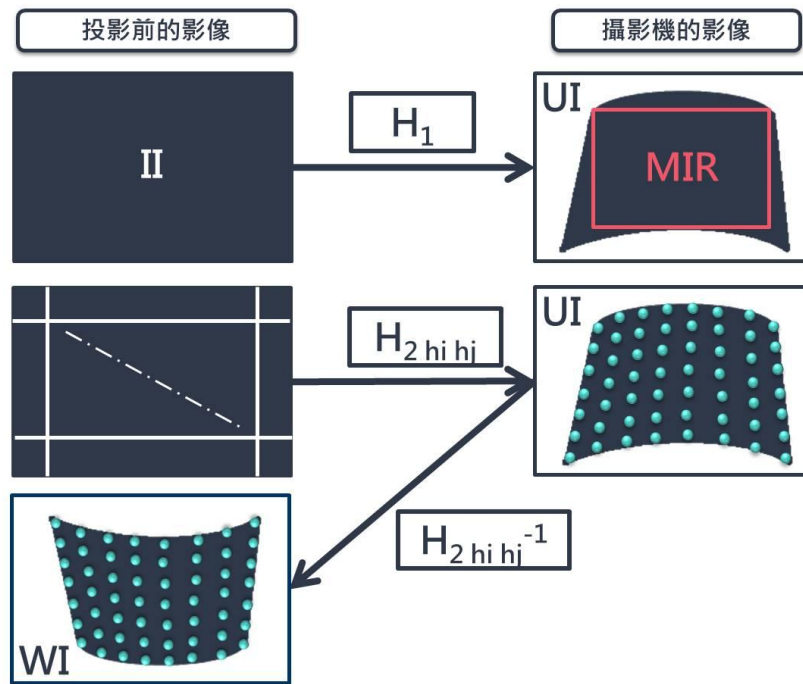


圖 2.12：曲面投影校正流程示意

分析探討上述文獻上的方法後，於投影校正時將會遇到下列問題：第一個問題，由於投影畫面可顯示區域的限制，為了得到校正後最大的顯示效果與不超出顯示的範圍，一般文獻上利用取得最大內接矩形(MIR)的方式進行投影校正，因此若不計較最後顯示畫面的比例，有時會發生失衡的情況出現，就這個問題在本論文我們將提出針對以上問題於投影失真校正的同時進行改善之方法。

第二個問題則是一般文獻上透過先計算正轉換來間接計算逆轉換的方式，將會有高機率產生後續計算誤差的問題，特別是在曲面投影校正上，誤差問題將使校正結果畫面中會有區塊之間空洞不連續的問題導致校正後顯示的效果不佳。這是因為電腦在做影像處理時，是以採樣取點的方式作處理，因此經過幾何轉換後的區塊，會因為計算誤差導致畫面產生空洞，也就是不連續的現象出現，須進一步利用內插法或其他方式進行畫面的補點，讓投影之後的畫面能夠呈現連續的狀態。

第三章、投影影像可逆性原理

本章節的內容主要針對本論文中最重要的投影影像可逆性原理進行定義並詳細描述、解釋其背後的數學意義為何?並探討實務上所會遇到哪些問題需要解決?

第一節、可逆性原理描述

投影影像可逆性原理的定義指的是，如圖 3.1 所示，當給定一任意投影屏幕 S 與任兩點， A 為投影點， B 為觀測點。當由 A 點將一圖像 I_m 投向 S ，而被 B 點觀測為成像 I_m' 。如果置換 A 與 B 之投影與觀測的角色，即由 B 點逆向投影 I_m' 到原投影幕 S 上，則在 A 點將觀測到原先 A 所投影出去的圖像 I_m 。



圖 3.1：投影影像可逆性原理的現象

對比於投影影像可逆性原理，一般比較為人熟悉的可逆性是發生在光線折射不同介質時所發生的現象，我們稱之為光線折射的可逆性(Reversibility of Light)，如圖 3.2 所示，根據定義“*If a beam of light is reflected back on itself, it will traverse the same path or paths as it did before reversal.*”[17] 解釋當穿透不同介質的光線，如果回逆其行進方向，則光線仍將沿著原路徑回溯。

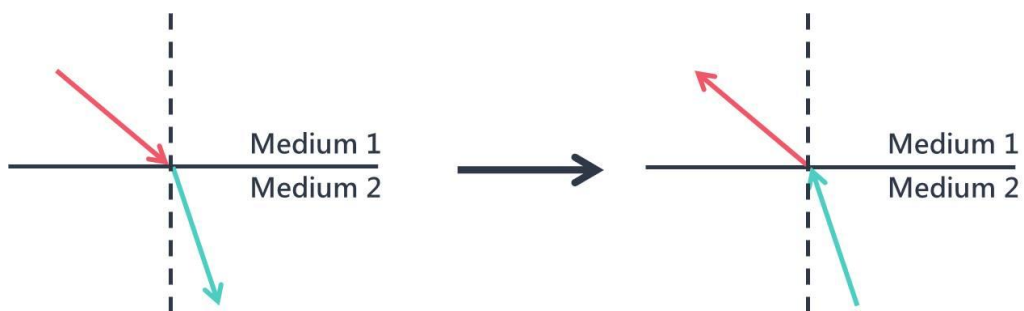


圖 3.2：光線折射可逆性原理示意

透過上述的個別定義來看：光線折射定律其基本概念為“光線”折射的可逆性，與之相較，本論文中主要闡述是“投影影像”的可逆性原理，兩者之間存在著這樣的差異。

本論文透過應用可逆性原理於下列兩種情境下定義出可適用的範圍：第一種，當投影一張任意的影像從投影點 A 到觀測點 B 的攝影機接收影像，然後基於可逆性原理從 B 點反投影此接收影像回去，在 A 點上所看到反投影回來的影像，由於光線是可逆的，因此兩者之間單就影像中的形狀或線條來說是能夠被校正，但從影像的內容來看，例如像素的彩度或亮度是不可逆的，所以還需要額外的畫面補償。假如從 A 點投影一張白底紅色的矩形影像到一個綠色的屏幕上，於 B 點看到是一張呈現黃色的失真影像；若從 B 點反投影失真影像回去，在 B 點所看到的影像中形狀會被校正回矩形，但是顏色並非為原本綠色且亮度也會衰減。

第二種，於投影失真校正的應用上，本論文是透過可逆性原理取得一張包含校正資訊的攝影機影像，經由程式處理偵測出特徵點的座標，然後計算出 CT，對於欲投影的影像進行處理，從 B 點投影出去作校正。假如從 A 點投影相同白底紅色的矩形影像到一個綠色的屏幕上，於 B 點雖然看到的是一張呈現黃色的失真影像，但經由程式偵測特徵點的座標，計算 CT 直接處理原本白底紅色的矩形影像，再從 B 點投影回去，於 A 點所看到的影像形狀被校正，雖然亮度沒有變化，但是顏色也不會回復到原本的紅色，而是呈現黃色，因此若要作到影像的內容不會被影響，就必須投影於全白的投影面上。

因此在全白的投影面且失真區域內的特徵點都被攝影機看到的情況下，這時當作投影點的 A 與觀測點的 B 不會有任何約束關係，皆可適用可逆性原理來作投影校正，但在後續還會有實際應用上的問題待解決。

若不考慮攝影機投影影像空間與攝影機影像空間的差異，例如解析度不同、實際應用上等問題，以理想的狀態與適用範圍下將此原理擴大應用於任意觀測點的校正，如圖 3.3 所示，將 A 點視為投影點放置一台攝影機 P' 並投影一個任意的圖像 II，經由投影轉換後，利用攝影機個別取得在不同觀測點 B1-B3 上的攝影機影像 CI；經由投影影像可逆性原理置換 A 與 B 之間的角色關係後，於 B1-B3 點上各放置一台攝影機，剛剛所取得的攝影機影像 CI 作為投影圖像，則在 A 點所看到的攝影機影像 CI 皆回復到原本從 A 點所投影出去的圖像。同理可知，針對不同觀點下的失真影像，只要能取得相對應之接收圖像，都可以經由投影影像可逆性原理校正回去。

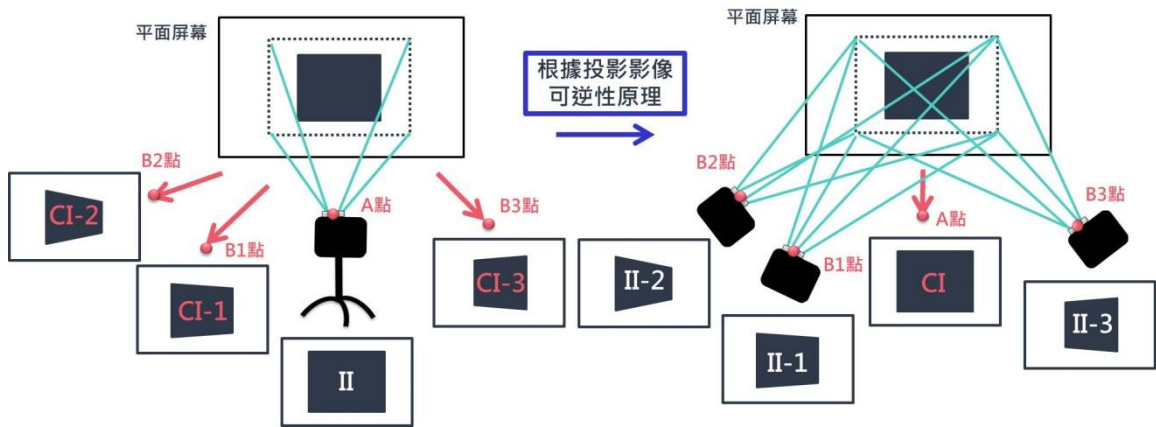


圖 3.3：任意觀測點下之投影影像可逆性原理示意

第二節、校正應用與電腦視覺的解釋

在理想的狀態下，如何針對投影失真得到一個校正模板(CT)進行有效的校正呢？如圖 3.4 所示，假設一觀看者於觀測點 B 欲看到一個正常的棋盤格影像，從投影點 A 要投影怎樣的影像才達到這樣的目的呢？根據可逆性原理的現象，經由置換裝置之後，於 B 點反投影一張正常的棋盤格影像於此投影面上，反應此投影面以及由 B 點過來投影關係，在 A 點會接收到一張不規則失真的影像，並以此影像作為 CT 的校正資訊依據；因此，針對原 A 點上投影機所要投影的影像乘上 CT 後得到一個經過處理過後的影像，並沿著 A 點到 B 點的原路徑方向投影後，就會剛好看到一個正常的棋盤格影像，這樣就可以達到影像的校正。

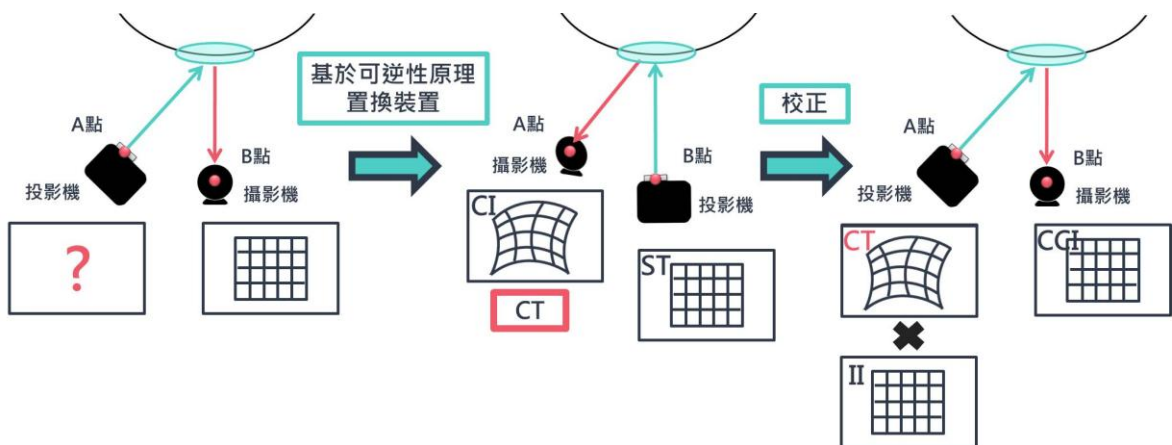


圖 3.4：基於可逆性原理之理想的投影失真校正流程

如圖 3.5 所示，經由探討可逆性原理之校正流程解釋其背後的數學意義，當投影機從 A 點投影一張任意的影像時，經由 A 點到 B 點的路徑，影像因為一個 H 的作用，導致攝影機中所看到的投影影像失真變形；基於可逆性原理，置換裝置之後，我們將 A、B 點上的裝置位置對調，經由反投影一張相同的影像，沿著 B 點到 A 點的路徑回去，則在 A 點位置的攝影機接收到另一張不規則失真的影像，作為校正模板的校正資訊來源，因此從 B 點到 A 點之間稱為一個 H^{-1} 的轉換；因此，針對原 A 點上投影機所要投影的影像，乘上 CT 後得到一個經過處理過後的影像，並沿著原 A 點到 B 點的路徑方向投影後，則 B 點沿著原投影方向看投影面時，就會剛好看到原本的影像。

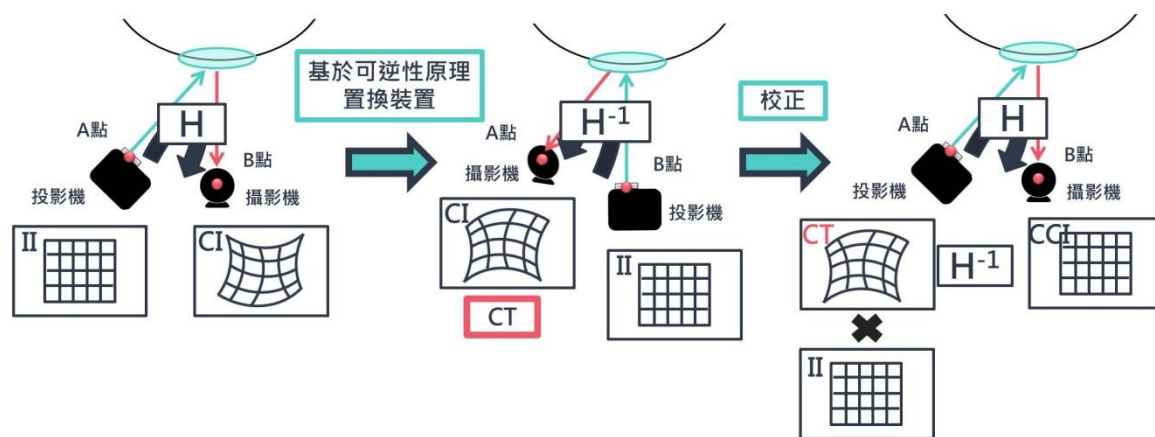


圖 3.5：基於可逆性原理之理想的投影失真校正流程與背後數學意義

第三節、實務上的現實

透過可逆性原理進行校正時，實際的操作上將會遇到下列三個方面的問題：第一，如圖 3.6-(a)因為本論文中所使用的裝置關係，而產生攝影機解析度(1280X960)與投影機解析度(1920X1080)不一致，由(b)可知因為兩影像中的投影平面中心沒有對齊，使得產生一個平移的 $H_{\text{translate}}$ 導致所建立的 H 會不正確。

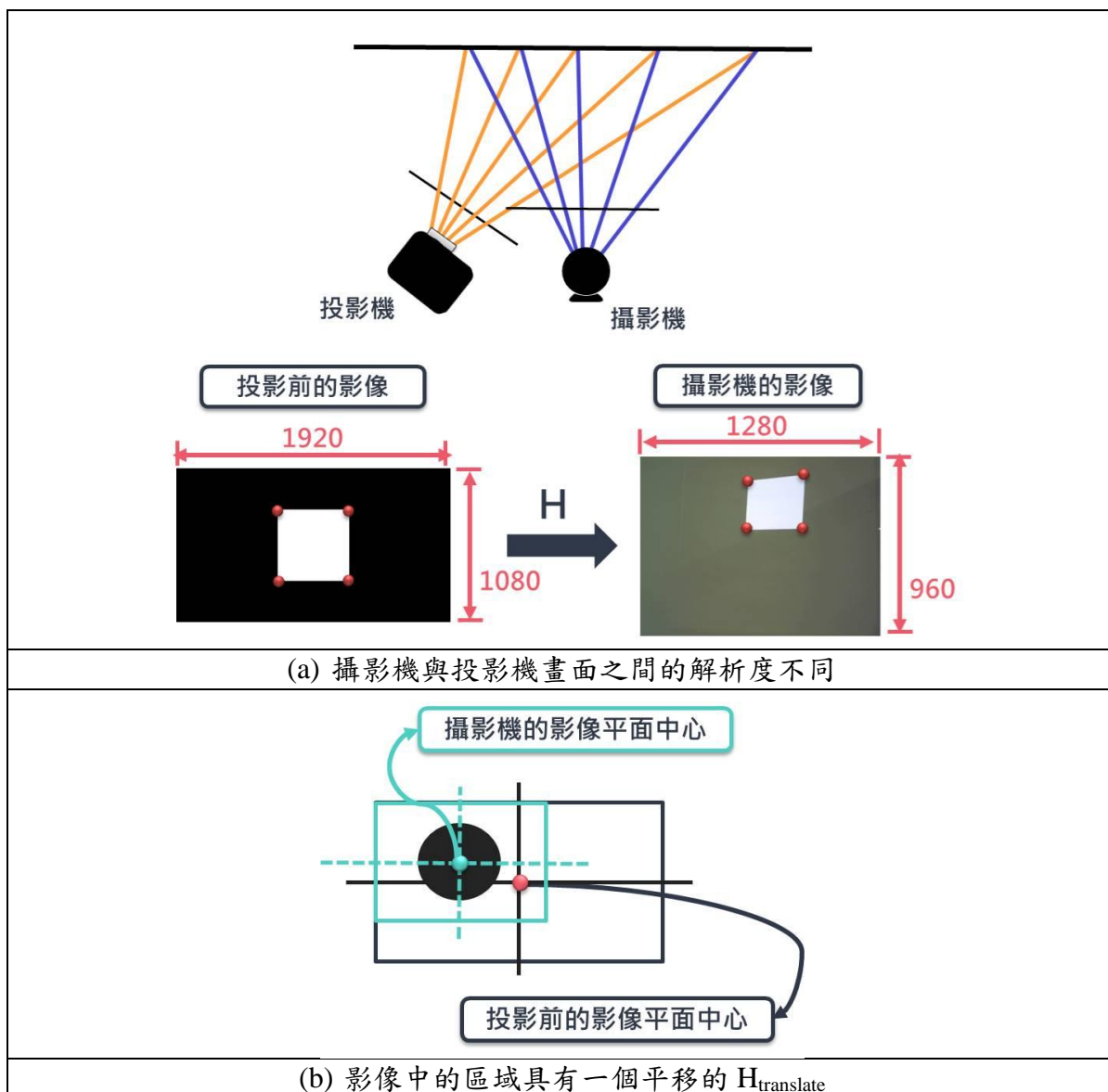


圖 3.6：攝影機影像解析度不依產生之問題示意

第二，為了系統的穩定且基於投影影像可逆性原理，在置換裝置不容易確保同定點、同方向等因素，本論文將置換裝置改善成於一台投影機之 Y 軸上方以疊置方式放置一台攝影機，因此於本論文中我們延伸出利用攝影機/雙投影機的系統進行校正。如圖 3.7 所示，於 A 點斜向投射的投影機 P 上方架設一台攝影機 C 同向朝著投影面擺放拍照取像，經由另一台投影機 P' 從 B 點正向投影，取得攝影機 C 影像裡相對應的校正資訊，經由校正前處理，針對從 A 點投影的投影機影像進行校正。

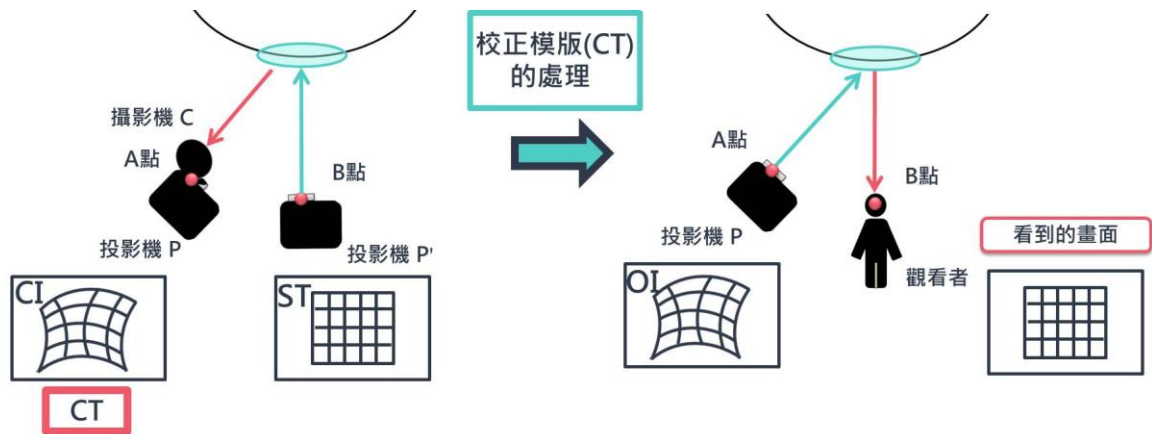


圖 3.7：攝影機/雙投影機系統架設示意

再來，為了實現基於可逆性原理下，以不須經過置換裝置的方式直接用來觀察 CT 的影像資訊，但是實際上投影機 P 與攝影機 C 之間的鏡頭位置還是不相同，導致應該由投影機 P 鏡頭位置所觀察到的 CT 跟從攝影機 C 的鏡頭位置所看到的 CT，來自兩者之間的影像資訊不可能一樣，因此後續還需要進行額外的攝影機校正。

這裡因為我們的裝置設置都剛好平行於地面，特別是攝影機 C 與投影機 P 兩者鏡頭平行於地面，而且同向朝著牆面擺放拍照取像，因此視覺上看起來像比例變換，實際上就是透過攝影機校正，將影像校正回應該在投影機 P 的鏡頭位置所看到的 CT，後續將透過自相似比例計算解決這樣的問題。

第三，由於投影畫面顯示區域的限制，為了得到校正後最大的顯示效果，一般文獻上利用取得最大內接矩形(MIR)的方式進行投影校正，因此在不考慮最後顯示畫面比例的情況下，有時會出現失衡。本論文中，所採用的方法是利用投影機隨著與投影面之間距離改變而放大縮小的特性，除了想要得到不差的顯示效果外，也想要兼顧校正前後圖像的解析度比例不失衡。

而為了控制好 H 的量不讓最後校正出來的畫面超出顯示的範圍，又可以經由固定最後顯示的區塊來維持畫面的比例，因此系統架設時斜向投影機 P 的投影區域必須完全覆蓋正向投影的投影機 P' 之投影區域，且由於攝影機作為觀測點的視野限制，於曲面上的校正來說，須完全觀測到投影機 P'，因此實際的系統架設上必須有所限制：如圖 3.8 所示，投影機 P 斜向投影的顯示範圍必須完整覆蓋由正向投影的投影機 P' 顯示範圍。

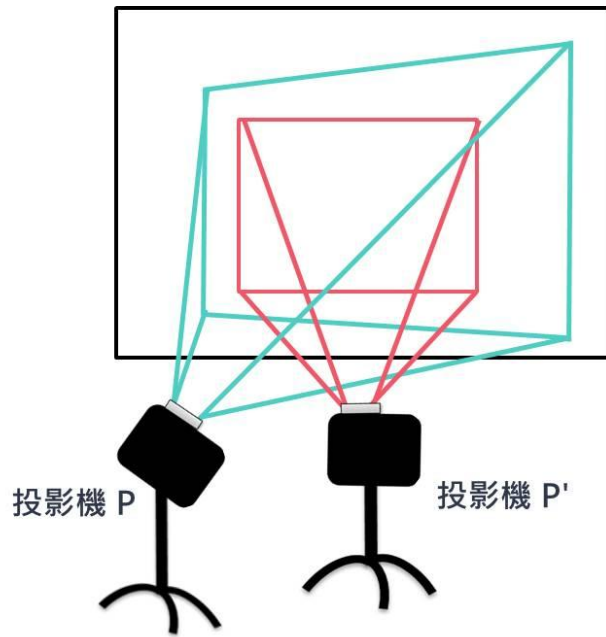


圖 3.8：攝影機/雙投影機系統實際架設的限制

與計算 MIR 相比的方法相比，如圖 3.8 所示，本論文中的方法其類似於文獻上用軟體計算取得 MIR 的效果，但是畫面比例不會隨著每次的計算而改變，使得每次經過校正後的畫面都會在投影機 P' 的投影範圍中，具有固定顯示的效果。

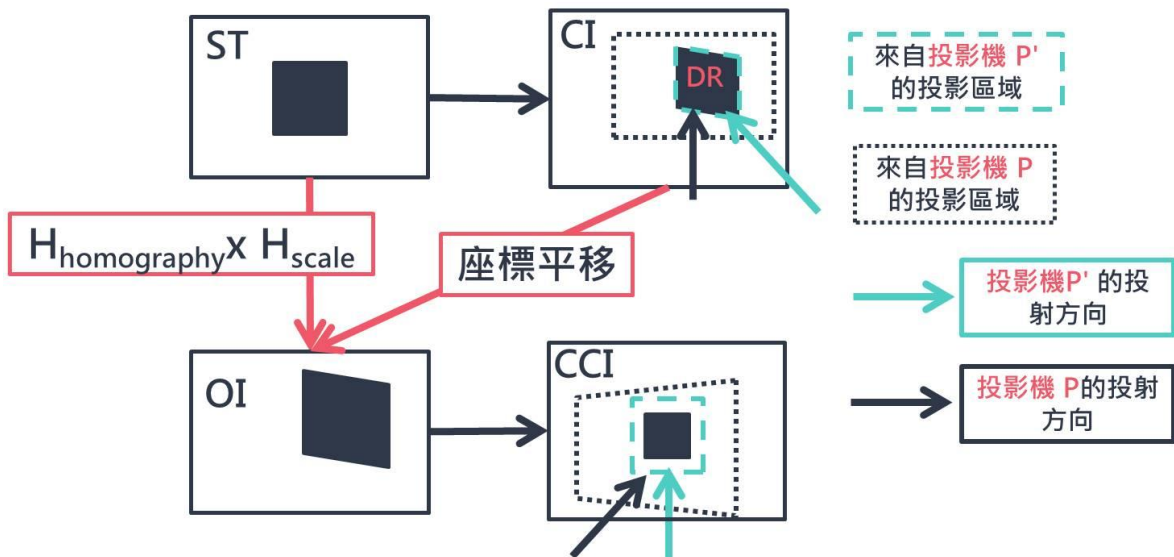


圖 3.8：本論文斜面校正結果的流程示意

第四章、斜面校正與曲面投影校正技術之自動化規程實現

本章節的內容為投影影像可逆性原理應用於投影失真的校正，並介紹校正系統環境佈置及本論文方法中如何解決投影失真、改善文獻上的缺點與實際操作上的問題，並就自動化斜面與曲面的投影校正流程、演算法作詳細的介紹。

第一節、校正環境的佈置

本論文基於可逆性原理的概念下，透過攝影機/雙投影機的系統進行後續的投影校正，如圖 4.1 所示，設置一台斜向投射於平面屏幕或曲面屏幕之投影機 P，並在其正上方的位置架設一台攝影機 C，以同向朝著投影面擺放的方式拍照取像，經由另一台投影機 P' 正向投影於投影面，攝影機 C 拍照計算影像裡相對應的校正資訊，經由校正前的預處理，針對投影機 P 的失真影像進行校正。

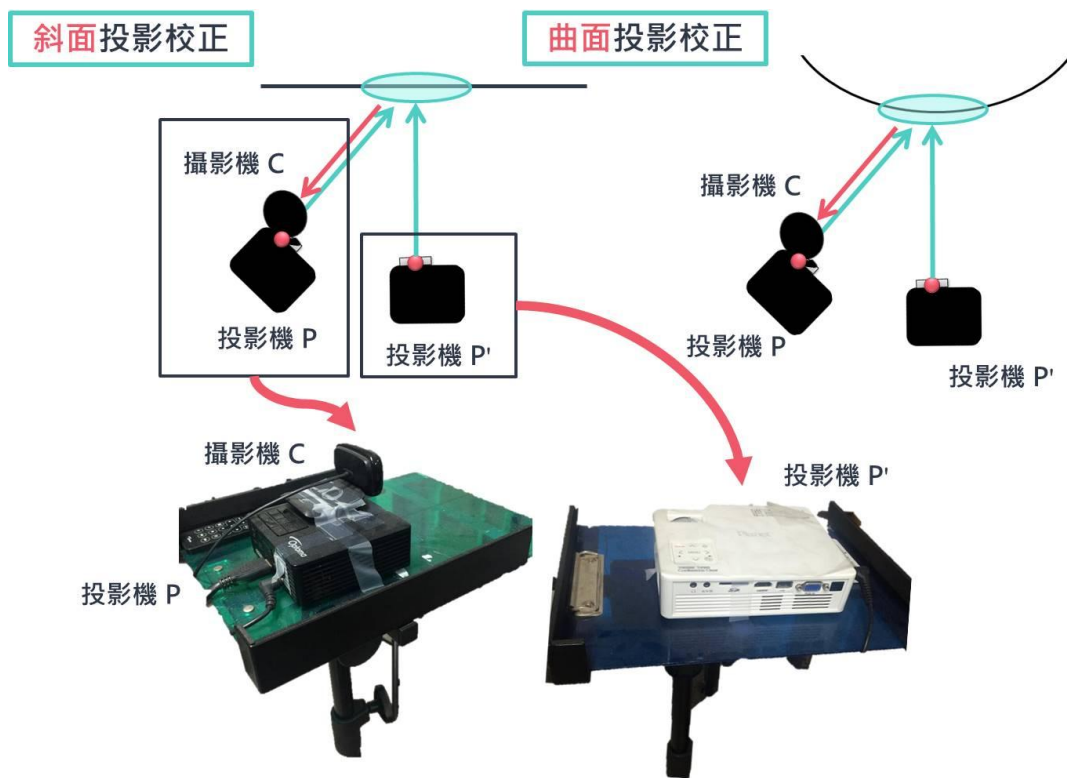


圖 4.1：校正環境的佈置與實際裝置圖

第二節、可逆性原理於實際校正應用簡述

如圖 4.2 所示，理想的狀態下，有別於一般文獻的方法[8]，本論文中透過可逆性原理可以直接計算逆轉換 H^{-1} 得到 CT，這裡因為計算過程的簡化可以得到較小的誤差值。

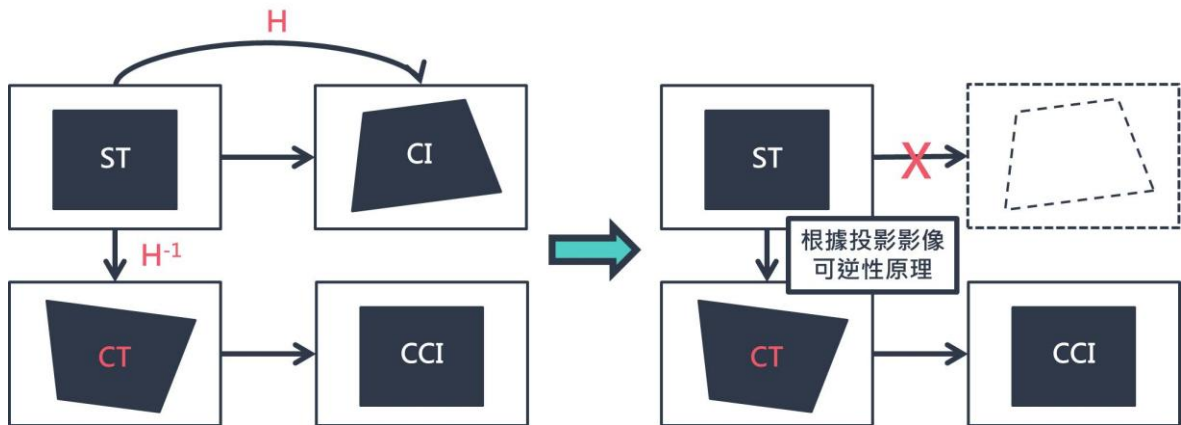


圖 4.2：可逆性原理理想的狀態下可以直接計算逆轉換

實際操作上而言，如同第三章的第三節所提到的第一問題，由於投影影像與攝影機影像的解析度不同，導致所取得的特徵點座標無法對應而影響最後的校正結果，因此，如圖 4.3 所示，透過將攝影機影像的平面中心平移到投影前的影像平面中心，以對應的方式解決解析度不同的問題。而這樣的問題經常發生於計算投影影像與攝影機影像之間的 H ，因此在後續自動化校正流程的步驟中，計算影像之間的關聯性之前都必須先進行座標平移的動作，以解決不同影像的解析度底下所造成之 H 計算錯誤。

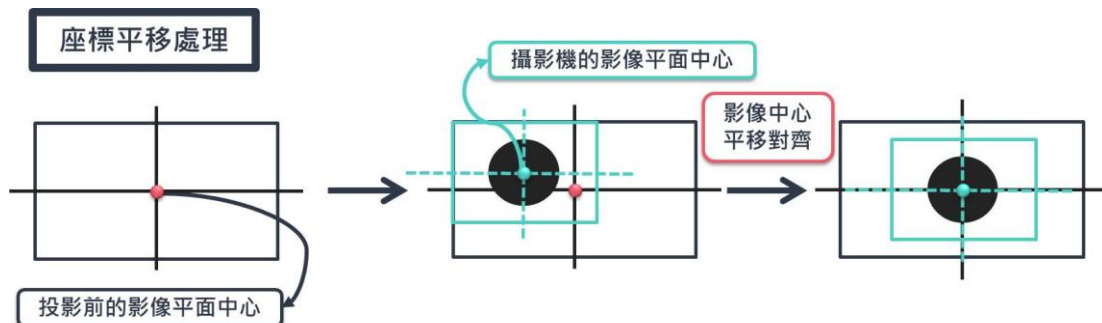


圖 4.3：影像中心平移解決解析度不同的問題之詳細步驟示意

解決影像間不同解析度的問題之後，接下來進行斜面投影校正時，基於可逆性原理的系統架設下我們將透過幾何關係計算與自相似比例計算，以取得一個 CT 針對後續欲投影的影像進行處理，以抵銷失真影響。

幾何關係計算的目的在於，第一步，如同第二章的第三節所提到的第二個問題，先座標平移計算因解析度不同而造成的 $H_{\text{translate}}$ ，第二步再基於投影影像可逆性原理直接計算逆轉換 $H_{\text{homography}}$ 解決投影校正的問題。如圖 4.4-(a)可知，系統擺設中利用攝影機 C 針對投影機 P' 所投射相對應的反失真影像進行取像；由圖 4.4-(b)可知，座標平移後再進行 $H_{\text{homography}}$ 的求解。

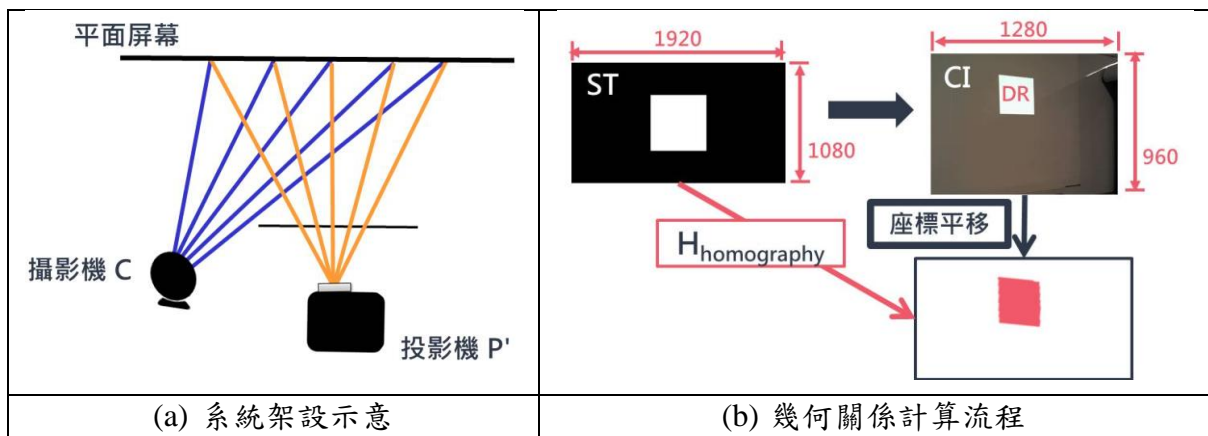


圖 4.4：斜面校正之幾何關係計算示意

實際應用上仍需要進一步針對用來觀察 CT 的攝影機 C 進行影像的校正，如同第三章第三節所提到的第二個問題，由於我們的裝置設置攝影機 C 與投影機 P，兩者鏡頭平行於地面且同向朝著牆面擺放拍照取像，雖然視覺上看起來像比例變換，實際上就是進行攝影機校正，目的在於將影像校正回應該在投影機 P 的鏡頭位置所看到的 CT，後續我們透過自相似比例計算進行攝影機校正。

自相似比例計算目的在於，第一步，如同第二章的第三節所提到的第二個問題，先座標平移計算因解析度不同而造成的 $H_{\text{translate}}$ ，第二步再基於投影影像可逆性原理直接計算攝影機 C 校正之轉換 H_{scale} 。如圖 4.5-(a)可知，系統擺設中利用攝影機 C 針對投影機 P 所投射一個標準模板(ST)，針對攝影機 C 的影像進行校正；由圖 4.5-(b)可知，座標平移後再進行 H_{scale} 的求解。

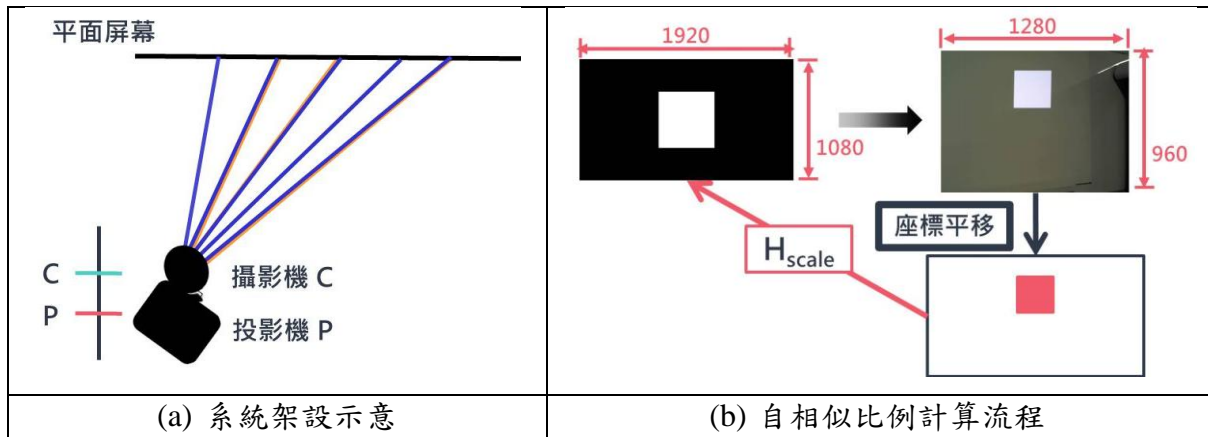


圖 4.5：斜面校正之自相似比例計算示意

另外，進行曲面投影校正時，與斜面投影校正相比，除了上述的問題需要解決之外，曲面所造成之不規則投影失真，特徵點會因為不規則的投影失真呈現無規律的分布，導致在特徵點偵測與排序時增加計算與排序上的困難，延伸出後續程式計算的問題。

之後的章節，會先針對斜面投影校正的影像處理流程進行講解，之後再對曲面校正流程做重點式的說明，特別是曲面投影校正的重點在於如何有效的針對特徵點進行排序並且定位，以取得一棋盤狀的 CT 針對欲投影的影像作校正前的預處理。

因此，如圖 4.6 所示，為了改善這樣的現象，基於投影影像可逆性原理下，將用來投影取得校正資訊用的棋盤格演化為以時間為序列之點集合。並且為了增加特徵點偵測的精確度以及後續計算排序上的方便，我們以時間為序列投射棋盤格中各個點的方式從中心由左至右，由上往下至曲面或不規則面上。最後依照影像收集順序，進行特徵點的偵測與擷取，並同時排序對應於棋盤格的各區塊，以建立個別的 $H_{homography\ ij}$ ，這樣的校正改良方式能有效解決不規則失真下的棋盤格排序問題。

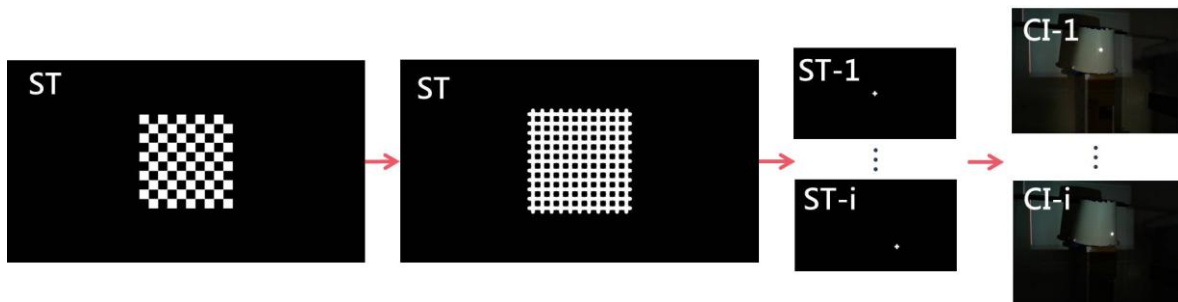


圖 4.6：棋盤格演化為以時間為序列的點集

第三節、自動化斜面投影校正流程

根據圖 4.7 所示，在自動化斜面投影校正流程中最重要的是取得校正模板(CT)，針對欲投影的影像作校正前的預處理。因此，本小節的重點在於如何經由影像處理與計算取得校正模板，使得來自投影機 P 的斜向投影失真影像能夠被校正。

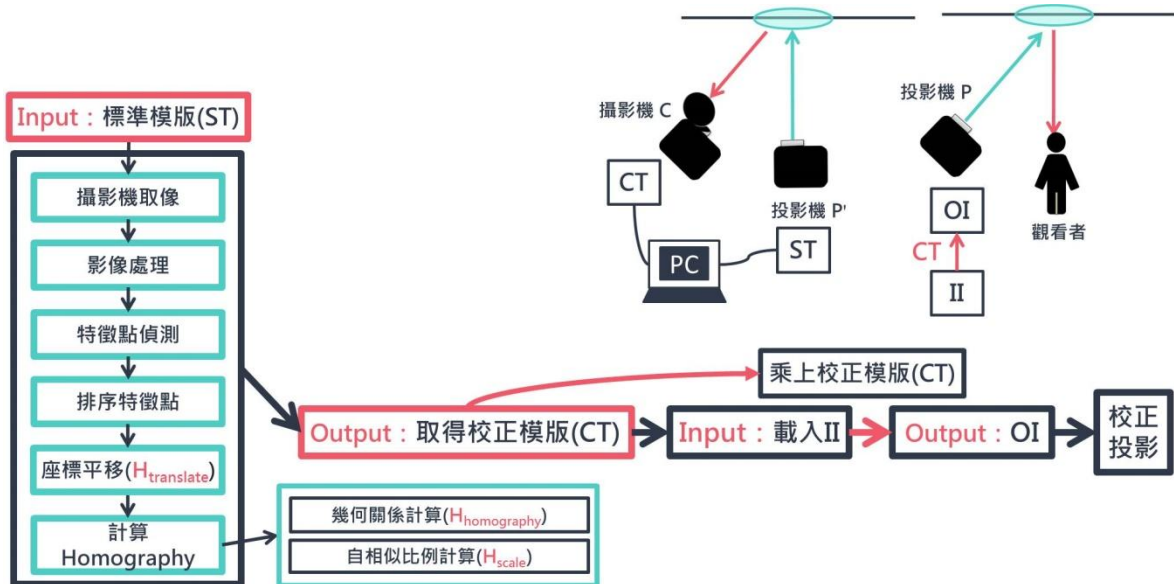


圖 4.7：自動化斜面投影校正流程

如圖 4.8 所示，攝影機取像的實際操作下，基於投影影像可逆性原理，放置另一台正對平面屏幕之投影機 P' 並投影一個標準矩形，同時在投影機 P 的上方放置一台攝影機 C，取得相對應的反失真矩形影像；接下來，透過投影機 P 投影一標準矩形，攝影機 C 同向朝著牆面擺放拍照取像，以取得校正攝影機 C 之影像資訊，為了達到自相似比例計算作攝影機校正。

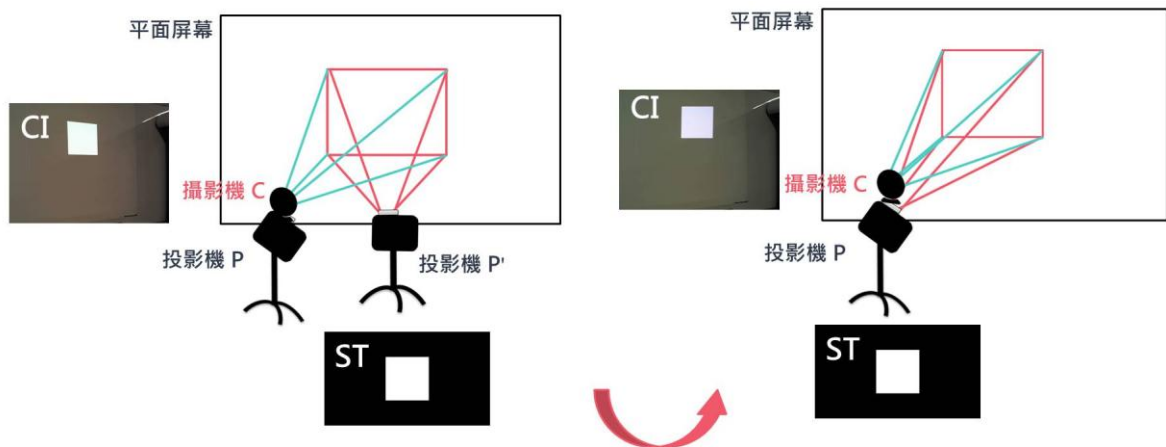


圖 4.8：自動化斜面投影校正之攝影機取像的實際操作示意

在影像處理與偵測特徵點的步驟當中，如圖 4.9 示，我們先將攝影機所取得的影像進行灰階處理，利用 OpenCV Canny() 針對影像中的失真區域進行偵測邊緣的動作取得邊圖，之後影像處理就以邊圖為主。

首先，我們利用 OpenCV findContour() 尋找邊圖影像中最大相連區塊內的區域質心，也就是擷取失真區域內的質心座標位置；再來，針對邊圖利用 Corner() 進行邊上角點的偵測，由於在測角的過程中，所測到的特徵點座標都是以像素為單位且不均勻地分散在影像中，因此為了得到投影校正中所需的特徵點座標，我們再次利用 OpenCV findContour() 將影像中所有的特徵點連成相連的區域，藉此擷取相連區域中最接近失真區域頂點的特徵點座標。

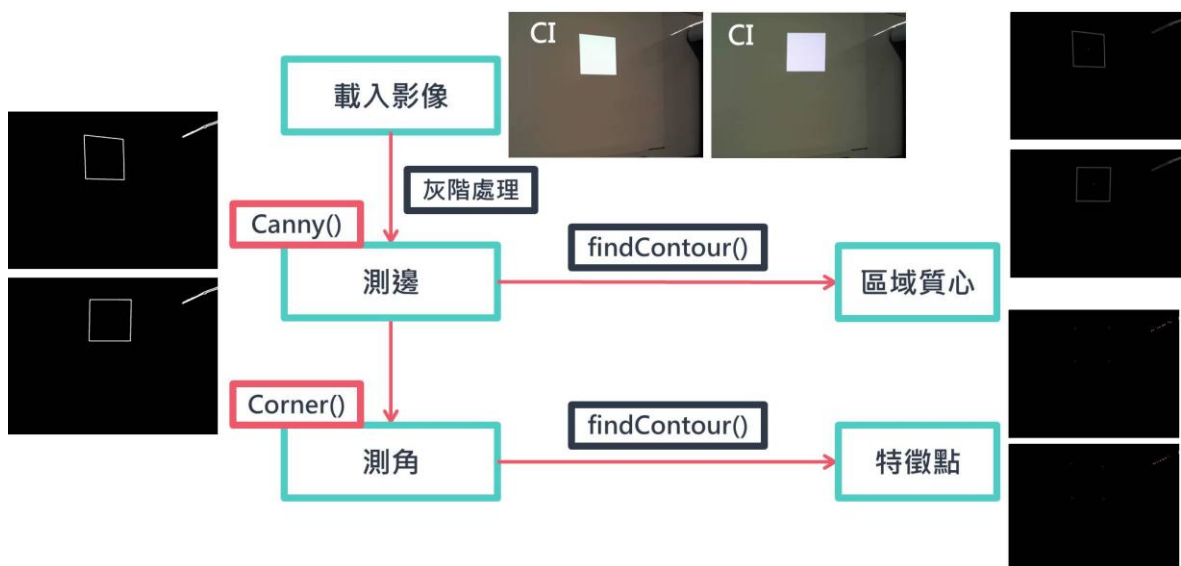


圖 4.9：自動化斜面投影校正之影像處理與特徵點偵測的處理流程

經過影像處理後，在攝影機影像中所擷取到的特徵點座標中，有可能會參雜些不必要的雜訊座標，因此透過每四個為一組的特徵點來計算其質心，以比對區域質心座標最接近的那一組才是我們所需的特徵點座標，並且透過與區域質心間的角度差進行如圖 4.10 中的排序。

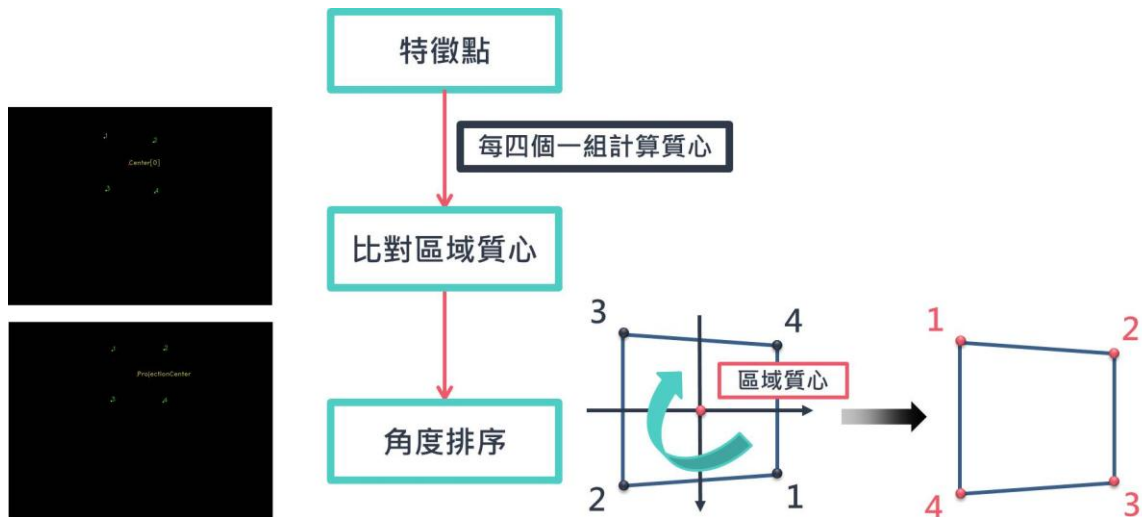


圖 4.10：自動化斜面投影校正之排序特徵點的處理流程

如圖 4.11 所示，影像中的特徵點座標擷取後，首先透過將攝影機影像平面中心平移到投影前的影像平面中心對應的方式解決解析度不同的問題，再分別進行幾何關係計算 $H_{\text{homography}}$ 與自相似比例計算 H_{scale} 的求解。

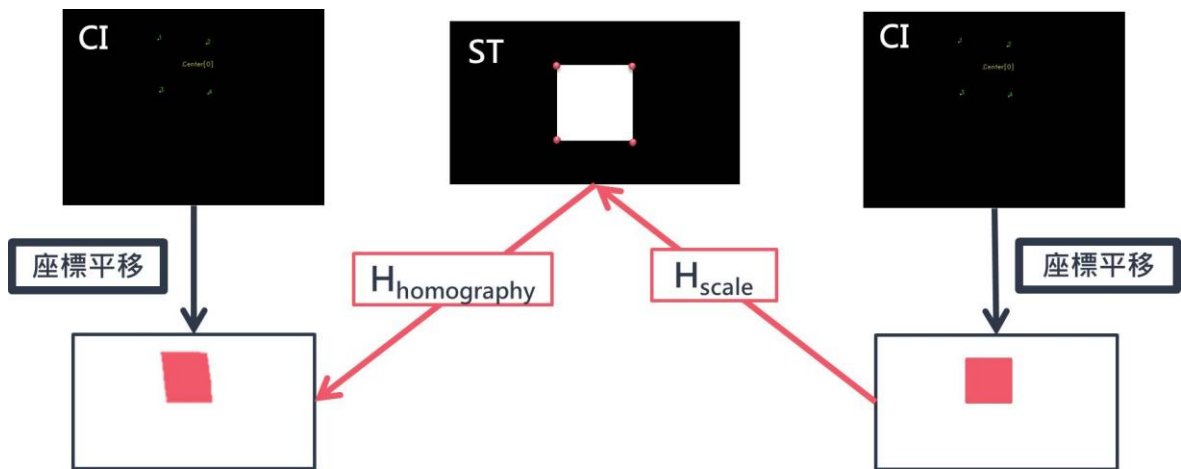


圖 4.11：自動化斜面投影校正之 $H_{\text{homography}}$ 與 H_{scale} 計算流程

如圖 4.12 所示，透過自動化斜面投影校正模版的使用，對於任意欲投影影像 II 利用 OpenCV warpPerspective()，依序針對影像進行扭曲的處理，也就是影像依序乘上矩陣資訊得到預處理的影像 OI，最後經過投影轉換、攝影機成像後於畫面中看到被校正的影像。

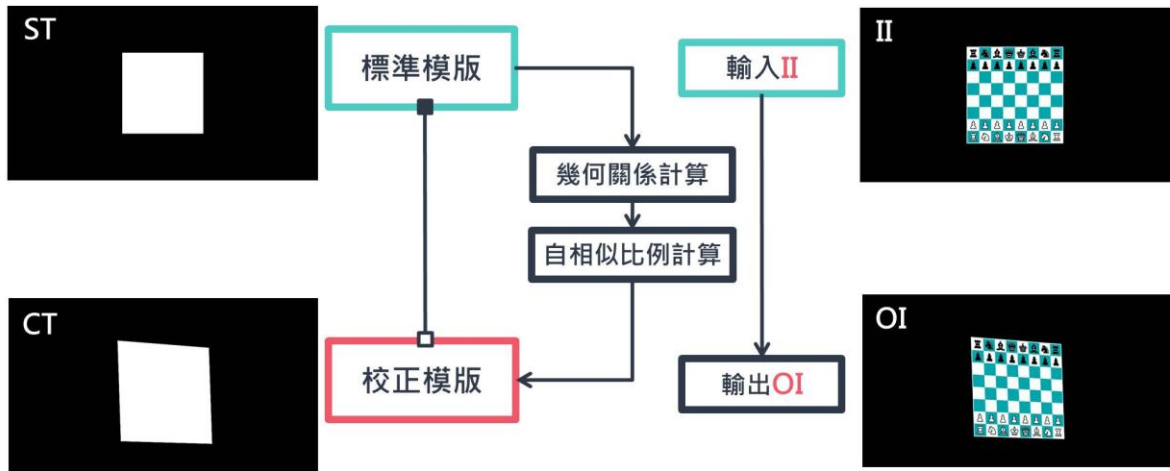


圖 4.12：自動化斜面投影校正之取得校正模板(CT)與應用

第四節、自動化曲面投影校正流程

曲面就是個很多小斜面的近似，在進行校正時關鍵是如何區隔出各個小方格。如圖 4.13 所示，本小節的技術重點在於如何有效率的偵測特徵點並同時進行排序，接著使用影像處理技術取得校正模板，使得來自投影機 P 的斜向投影於曲面或不規則面的失真影像能夠被校正。與斜面投影校正一樣，曲面投影校正時也會進行同樣的自相似比例計算作攝影機校正，且效果適用於每個小方格。

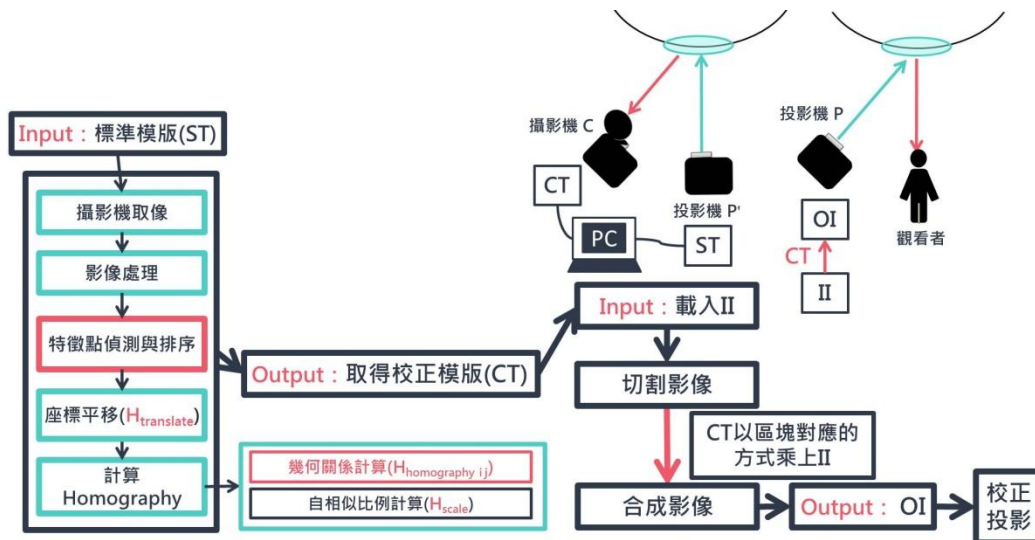


圖 4.13：自動化曲面投影校正流程

如圖 4.14 為攝影機取像的實際操作流程示意：基於投影影像可逆性原理延伸斜面投影校正的概念，透過投影機 P' 投影出以時間為序列之棋盤格特徵點集合，攝影

機 C 在投影機 P 上同向朝著牆面擺放拍照取像，經由投影前後特徵點之間的幾何資訊，計算出各區塊之間的校正模版。

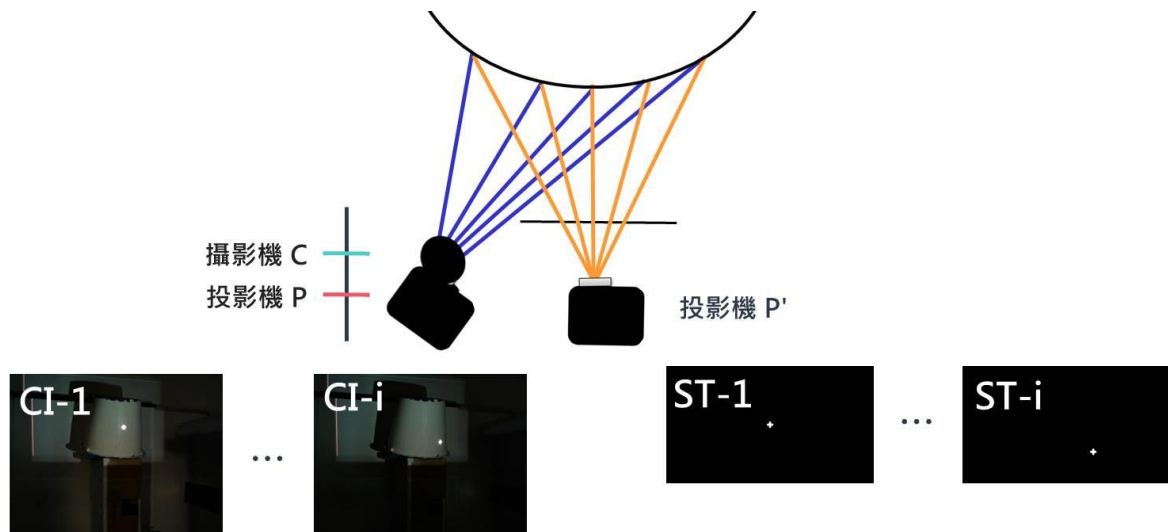


圖 4.14：自動化曲面投影校正之特徵點偵測與定位之攝影機取像的實際操作示意

在自動化曲面校正的特徵點偵測與排序中，如圖 4.15 所示，我們先將攝影機所取得的影像進行灰階處理，利用 OpenCV Canny() 針對影像中的失真區域進行偵測邊緣的動作以取得邊圖，這邊我們直接針對邊圖利用 Corner() 進行邊上角點的偵測，利用 OpenCV findContour() 將影像中所有的特徵點連成相連的區域，藉此擷取相連區域中最接近失真區域頂點的特徵點座標。

另外，進行曲面投影校正時，除了上述的問題需要解決之外，曲面所造成之不規則投影失真，特徵點會因為不規則的投影失真呈現無規律的分布，導致在特徵點偵測與排序時增加計算與排序上的困難，因此與斜面校正影像處理技術中最大不同的地方是在校正一開始，我們藉由投影一組以時間為序列之點集合的同時依序取像，而這樣的取像方式讓我們在偵測影像中特徵點的同時，也能根據時間的前後完成特徵點排序的動作，以建立起棋盤格中區塊間相對應之 $H_{\text{homography } ij}$ 。

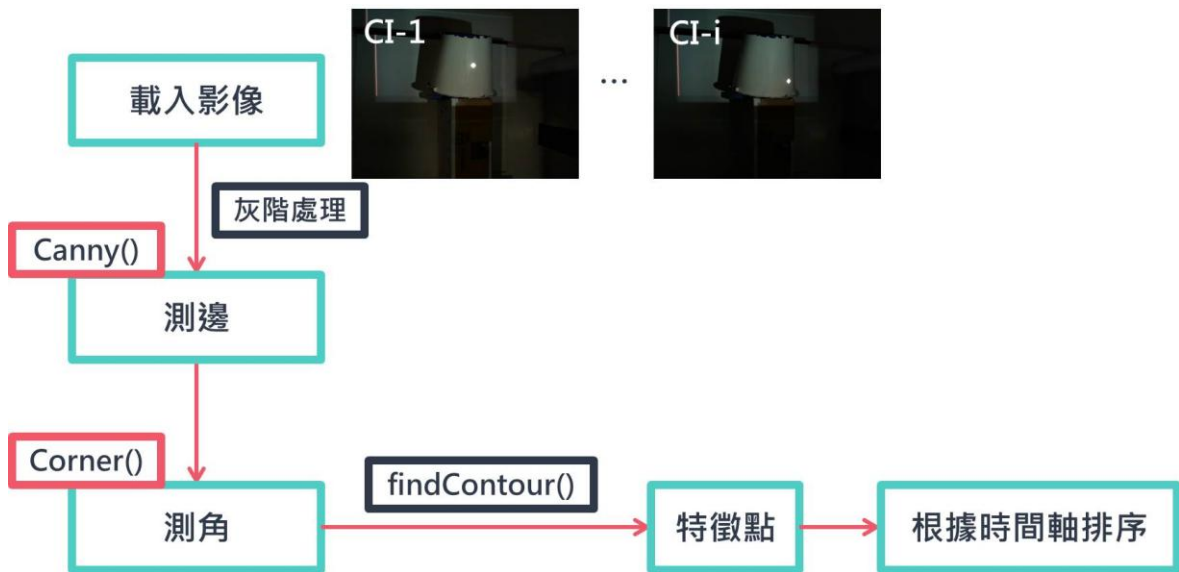


圖 4.15：自動化曲面投影校正之特徵點偵測與定位的影像處理流程

如圖 4.16 所示，針對標準的參考棋盤首先進行區塊之間的切割，經由乘上各區塊間相對應的校正模版(求法與斜面校正一樣)，重新合成為一棋盤狀的校正模板。

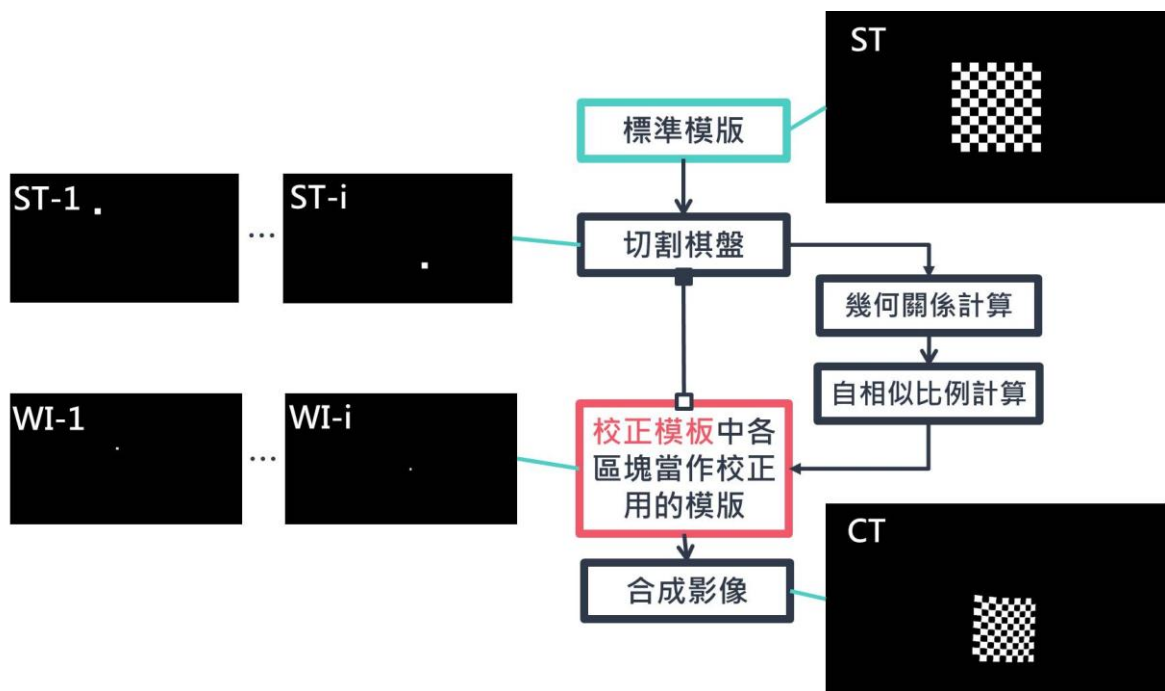


圖 4.16：自動化曲面投影校正之區塊之間的校正模板與合成之影像處理流程

如圖 4.17 所示，實務應用上最後透過自動化曲面投影校正模版的使用，對於載入任意欲投影影像 II 首先進行區塊之間的切割，並利用 OpenCV warpPerspective()，

依序針對影像進行區塊之間的扭曲處理，也就是影像依序乘上矩陣資訊再合成得到預處理的影像 OI，最後經過投影轉換、攝影機成像後於畫面中看到被校正的影像。

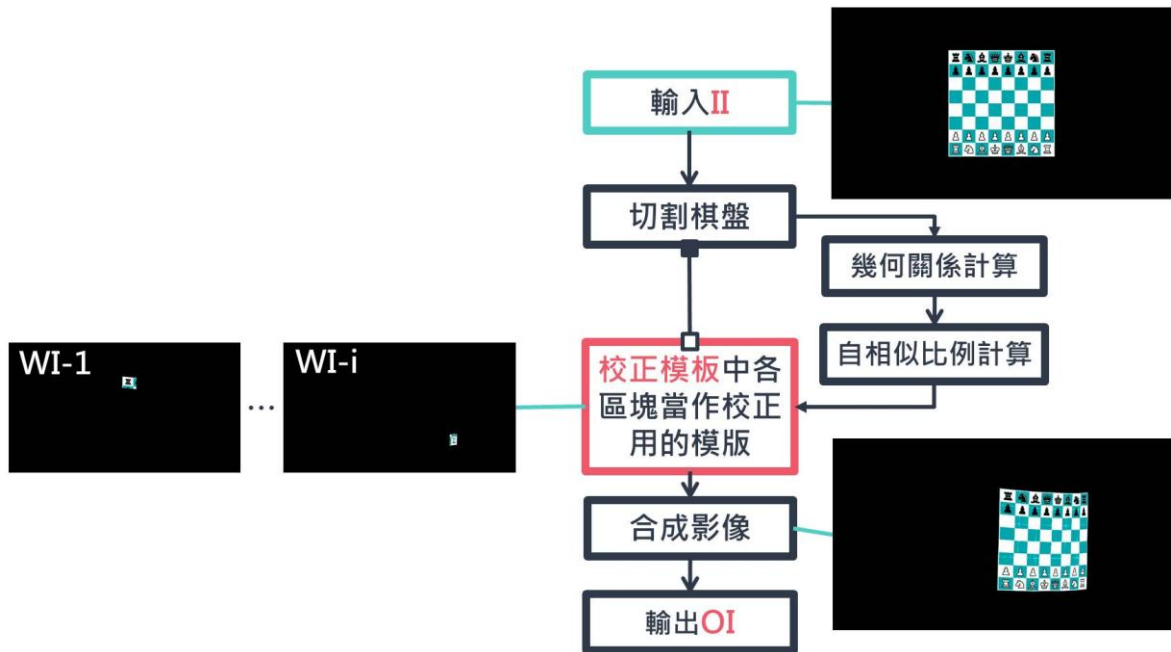


圖 4.17：自動化曲面投影校正之 CT 實際應用於任意影像

第五章、應用與展示

本章節一開始針對於雙投影機/攝影機系統上，因為實際上投影機 P 與攝影機 C 鏡頭位置不相同，導致 CT 的影像不正確，還需要進行額外的攝影機校正作驗證說明。另外，應用與展示本論文中斜面與曲面自動化投影校正流程的成果，並擴大延伸應用於牆壁三夾角上的近似校正。

第一節、攝影機校正

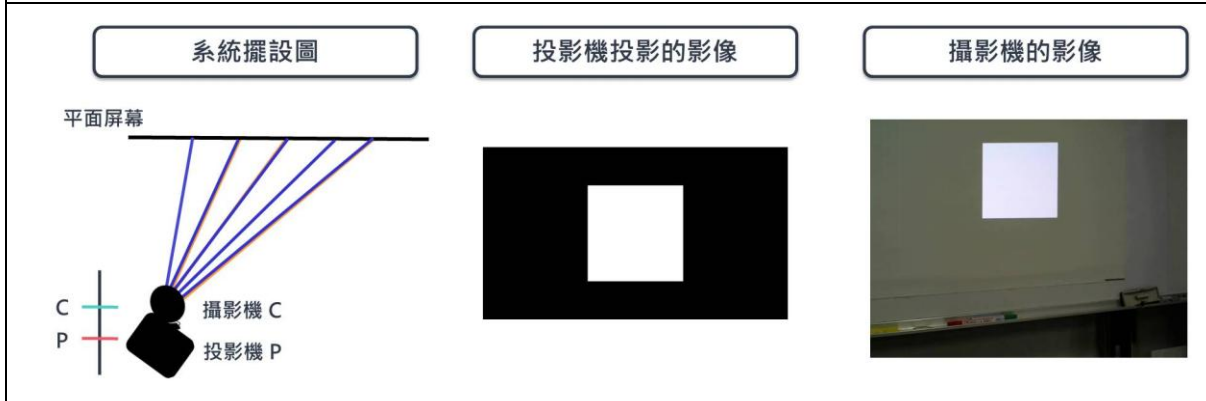
攝影機校正目的在於因為實際上投影機 P 與攝影機 C 鏡頭位置不相同導致 CT 的影像不正確，利用此針對攝影機 C 校正的方法將原本應該從投影機 P 所看到的 CT 給校正回來。由於我們的裝置設置攝影機 C 與投影機 P，兩者鏡頭平行於地面且同向朝著牆面擺放拍照取像，雖然視覺上看起來像比例變換，實際上就是進行攝影機校正。

因此本章節為了延伸探討在不同攝影機 C 與投影機 P 的系統設置下，如何進行攝影機的影像校正，並驗證是否對於後續的斜面投影或者曲面投影校正的結果是否有影響？

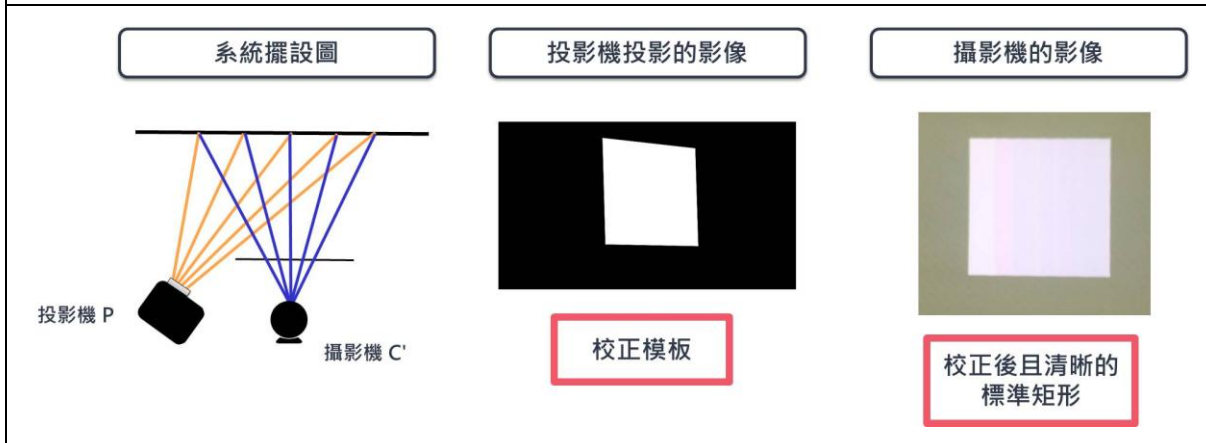
本章節中，設計兩項實驗分別於斜面與曲面投影校正上佐證下列事實：實驗一透過攝影機 C 以不同方向或角度下疊置於投影機 P，並進行投影校正結果比較，這實驗的目的在於透過這樣的校正流程讓處於任一相對位置之下的投影機 P 與攝影機 C，最後都能夠將 CT 校正回原本應該在投影機 P 鏡頭位置所看到的。

如圖 5.1-(a)所示，斜面投影校正時，假如一開始的攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置皆平行的設置下，經由 ST 的輔助下，進行攝影機 C 拍攝取像；(b)可知經由本論文的演算法計算出校正模板，經過投影之後抵銷失真影響，攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正；(c)顯示這時自相似比例計算之 H_{scale} 的實際數據；(d)中假設今天改變攝影機 C 與投影機 P 之間的相對位置，也就是攝影機 C 向左旋轉 15 度、仰角 5 度，經由投影相同的 ST，進行攝影機 C 拍攝取像；經由本論文的演算法再次計算出校正模板，從(e)可以看出經過投影之後抵銷失真影響，攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正成功；(f)則顯示當下自相似比例計算之 H_{scale} 的實際數據，可以知道雖然與步驟(c)的係數完全不同，但從結果上來看失真的投影區域皆被成功校正。

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 110cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 113cm)



(a) 攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置皆平行的設置下之攝影機取像

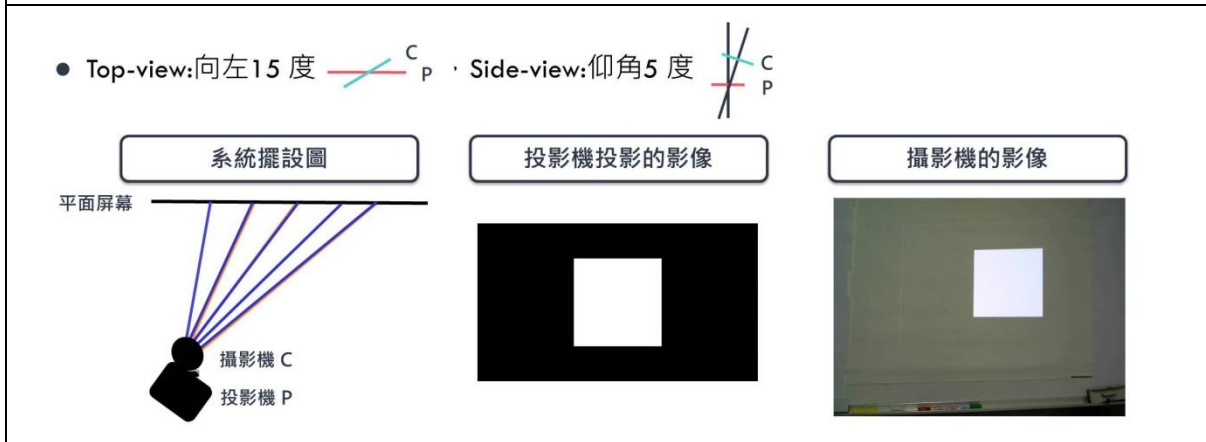


(b) 校正模板與校正後的結果示意

$$H_{scale} = [2.25004744, 0.01567372, -1039.10878374; \\ 0.07361801, 2.18722720, -146.92573478; \\ 0.00009623, 0.00000129, 1]$$

(c) H_{scale} 的實際數據

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 110cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 113cm)



(d) 攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置有夾角的設置下之攝影機取像

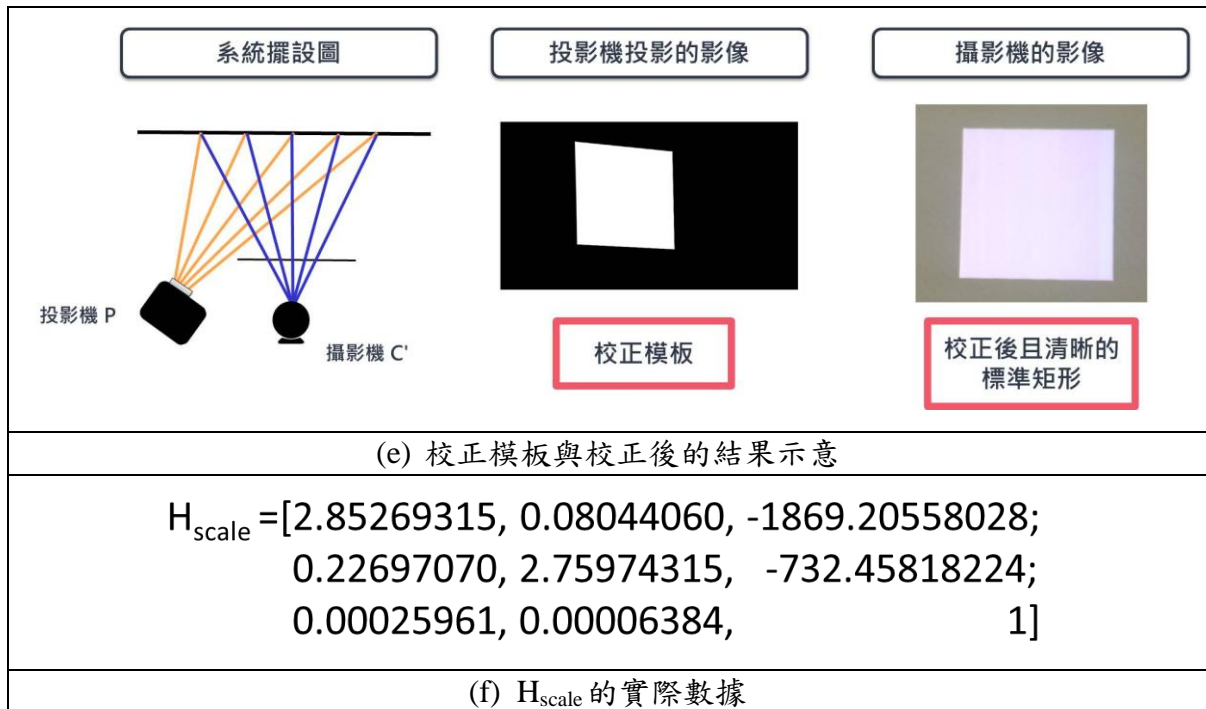


圖 5.1：斜面校正之不同情況下攝影機校正流程的結果比較

至於曲面投影校正下也會有相同的校正結果，校正流程的設置如同上述的斜面投影校正：如圖 5.2 所示，一開始的攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置皆平行的設置下，由(a)可知經由 ST 的輔助下進行取像；(b)可知經由本論文的演算法計算出校正模板，經過投影之後抵銷失真影響，攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正；(c)顯示這時自相似比例計算之 H_{scale} 的實際數據；(d)中將攝影機 C 向左旋轉 15 度、仰角 5 度，經由投影相同的 ST，進行攝影機 C 拍攝取像；經由本論文的演算法再次計算出校正模板，從(e)可以看出經過投影之後抵銷失真影響，攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正成功；(f)則顯示 H_{scale} 的實際數據，可以知道雖然與步驟(c)的係數完全不同，但從結果上來看失真的投影區域皆被成功校正，特別是在(b)與(e)的攝影機的影像中，左上的結果圖示意若今天與從正向投影相同的影像作疊合時，可以看出投影區域的失真不只能夠被校正且剛好可以對齊原本的位置。

因此，在本實驗一分別於斜面投影校正與曲面投影校正的結果來看，攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置皆平行或任意角度下，利用我們的自相似比例計算作攝影機 C 的影像校正後，所得到之 H_{scale} 都可以針對在不同攝影機 C 與投影機 P 的實驗架設下，最後都能夠將 CT 校正回原本應該在投影機 P 鏡頭位置所看到的。

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 89cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 80cm)

系統擺設圖	投影機投影的影像	攝影機的影像
<p>攝影機 C 投影機 P</p>		

(a) 攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置皆平行的設置下之攝影機取像

系統擺設圖	投影機投影的影像	攝影機的影像
<p>投影機 P 攝影機 C'</p>		

校正模板

(b) 校正模板與校正後的結果示意

$$H_{scale} = \begin{bmatrix} 1.980198012, & 0, & -831.08910891; \\ 0, & 2.04081633, & -60; \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

(c) H_{scale} 的實際數據

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 89cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 80cm)

● Top-view: 向左 15 度 · Side-view: 仰角 5 度

系統擺設圖	投影機投影的影像	攝影機的影像
<p>攝影機 C 投影機 P</p>		

(d) 攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置有夾角的設置下之攝影機取像

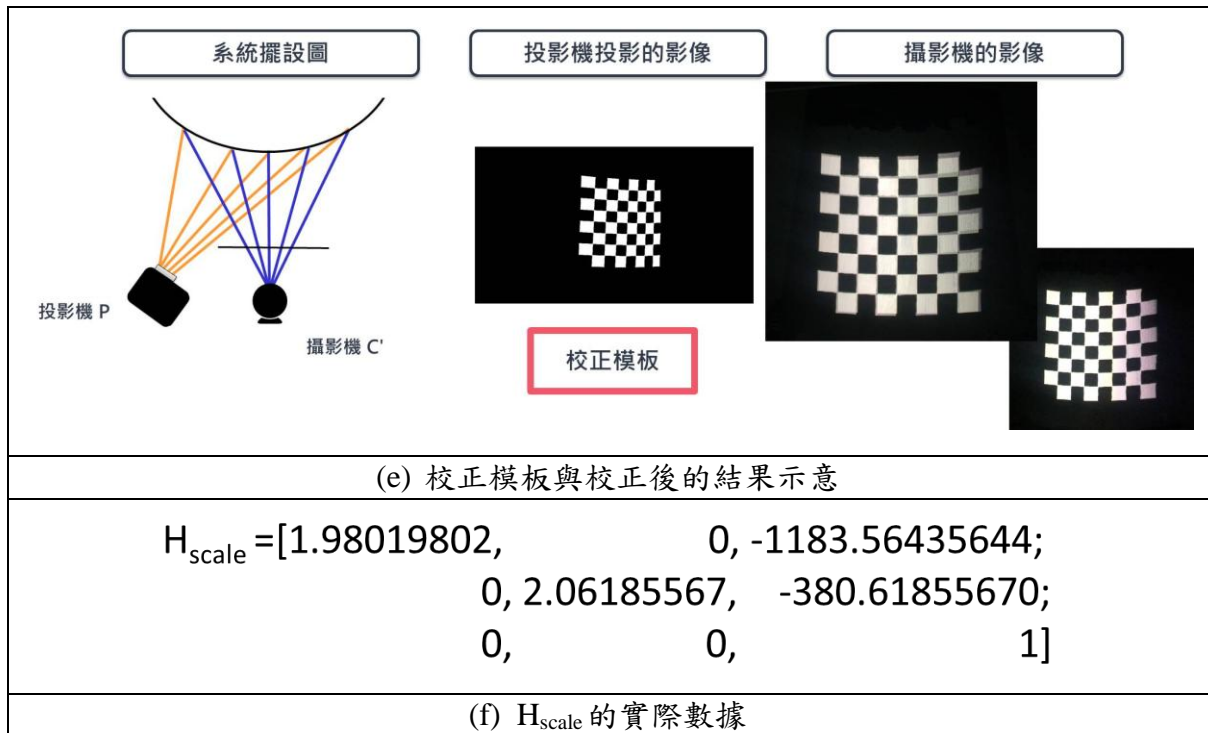


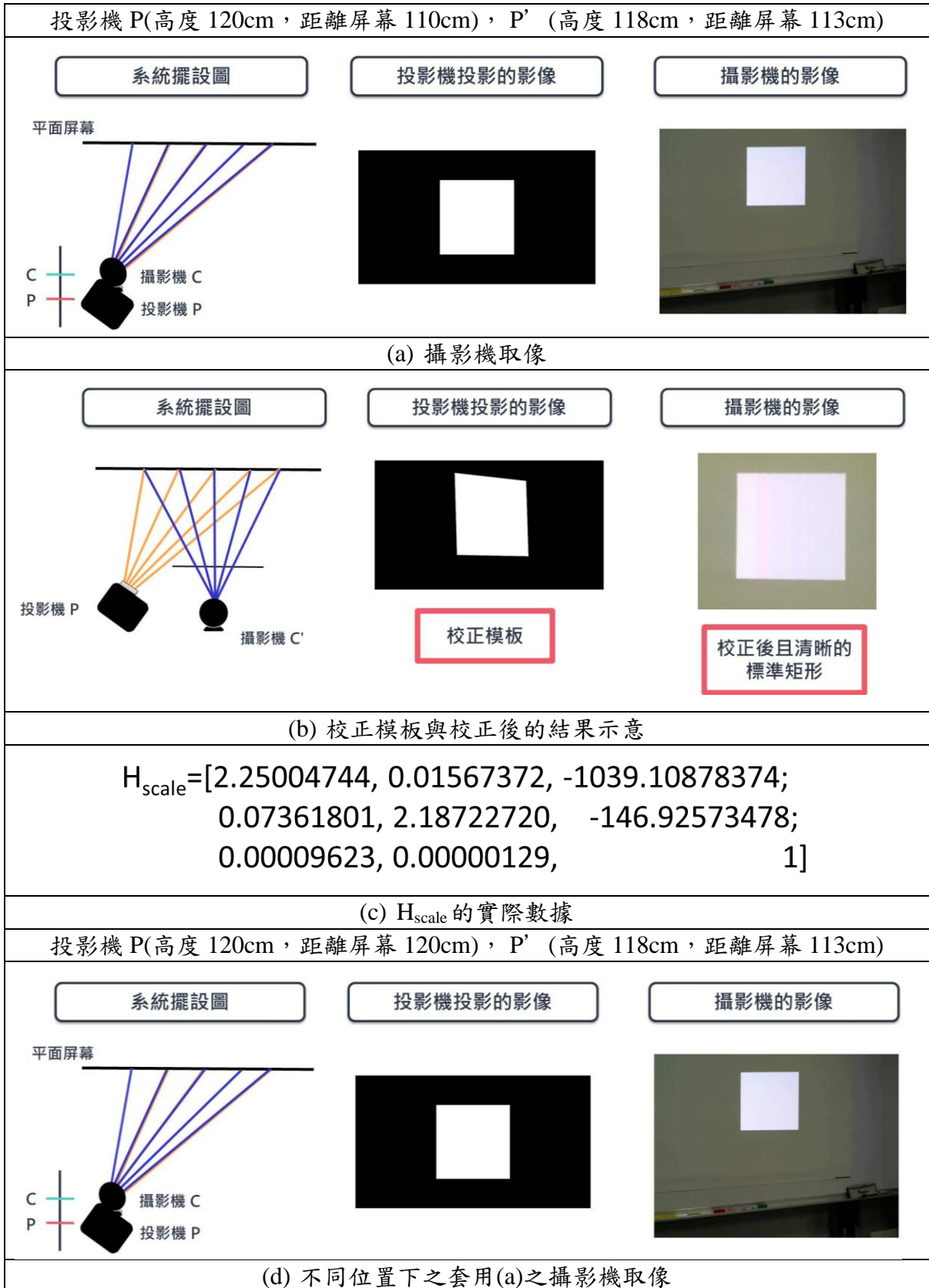
圖 5.2：曲面校正之不同情況下攝影機校正流程的結果比較

而實驗二則是固定攝影機 C 與投影機 P 的之間的相對位置，若使用相同的 H_{scale} 比較投影機 P 在不同的投影位置下的校正結果，確認是否可以校正成功？這裡的目的是想要透過實驗驗證是否可以經由計算一次 H_{scale} ，任何投影位置下的投影失真皆能被校正。

以下比較不同的投影位置下使用相同的 H_{scale} 的投影校正效果，如圖 5.3 所示，以斜面投影校正為例，(a)可知假如一開始的攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置皆平行的設置下，經由投影 ST 進行攝影機 C 拍攝取像；(b)可知經由本論文的演算法計算出校正模板，經過投影之後抵銷失真影響，攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正；(c)顯示當下自相似比例計算之 H_{scale} 的實際數據；(d)可知假如固定裝置之間的相對位置，不同的投影位置下之套用(a)之攝影機取像，於(e)經由本論文的演算法計算出校正模板，而攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正，但是左上圖經過疊合正向投影的影像後雖然有些偏差出現，但是大致上還是被校正成功且剛好符合原本的位置，(f)顯示 H_{scale} 的實際數據。為了比較 H_{scale} 的係數差異，(g)重新操作以取得反應當下投影位置的攝影機取像，(h)經由本論文的演算法計算出校正模板與(i)反應當下投影位置之 H_{scale} 的實際數據，可以看出與(f)之間的係數差異不大。

特別是在(e)與(h)的攝影機的影像中，左上的結果圖示意若今天與從正向投影相

同的影像作疊合時，可以看出投影區域的失真不只能夠被校正且剛好可以對齊原本的位置。



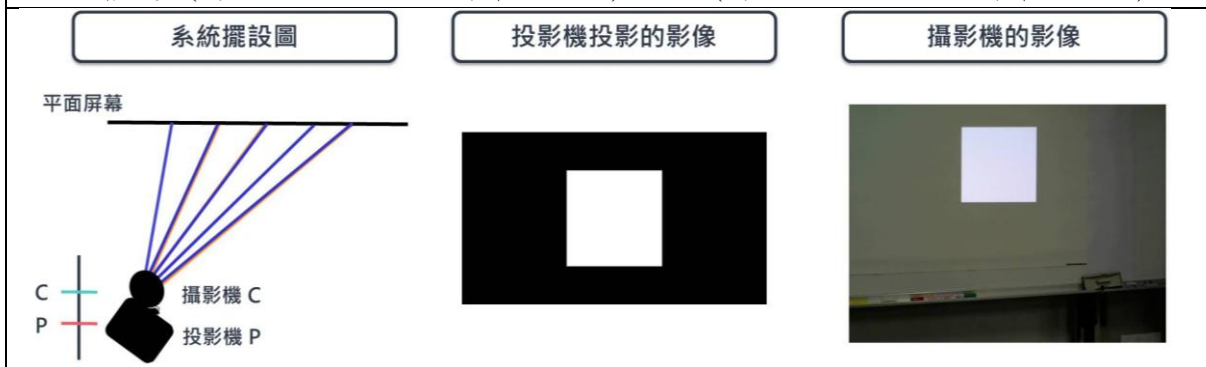


(e) 校正模板與校正後的結果示意

$$H_{\text{scale}} = [2.25004744, 0.01567372, -1039.10878374; \\ 0.07361801, 2.18722720, -146.92573478; \\ 0.00009623, 0.00000129, 1]$$

(f) H_{scale} 的實際數據

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 120cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 113cm)



(g) 不同位置下之新的攝影機取像



(h) 校正模板與校正後的結果示意

$$H_{\text{scale}} = [2.25906120, 0.01579136, -1047.90576431; \\ 0.05233863, 2.19580070, -122.89533719; \\ 0.00009691, 0.00000130, 1]$$

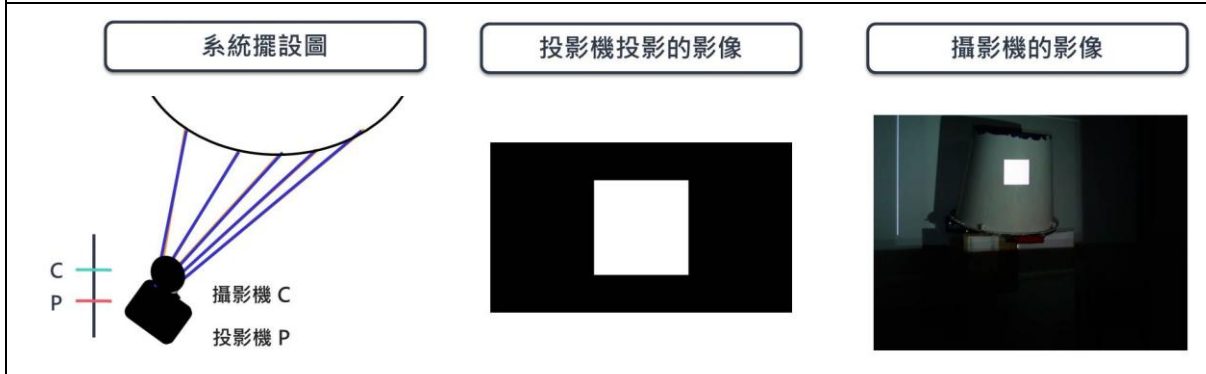
(i) H_{scale} 的實際數據

圖 5.3：斜面校正時比較不同的投影位置下使用相同的 H_{scale} 的投影校正效果比較

至於曲面投影校正下也會有相同的校正結果，如同上述的斜面投影校正流程：如圖 5.4 所示，(a)可知假如一開始的攝影機 C 與投影機 P 的擺放位置皆平行的設置下，經由投影 ST 進行攝影機 C 拍攝取像；(b)可知校正模板經過投影之後抵銷失真影響，攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正；(c)顯示 H_{scale} 的實際數據；(d)可知假如固定裝置之間的相對位置，不同的投影位置下之套用(a)之攝影機取像，於(e)經由本論文的演算法計算出校正模板，而攝影機觀看到的影像中投影失真區域被校正，但是左上圖經過疊合正向投影的影像後雖然有些偏差出現，但是大致上還是被校正成功且剛好符合原本的位置，(f)顯示 H_{scale} 的實際數據。為了比較 H_{scale} 的係數差異，(g)重新操作以取得反應當下投影位置的攝影機取像，(h)經由本論文的演算法計算出校正模板與(i)反應當下投影位置之 H_{scale} 的實際數據，可以看出與(f)之間的係數差異不大。

特別是在(e)與(h)的曲面投影校正的攝影機影像中，左上的結果圖示意若今天與從正向投影相同的影像作疊合時，從攝影機影像中可以看出投影區域的失真不只能夠被校正且幾乎能對齊原本的位置，在此就使用新舊 H_{scale} 係數比較其校正結果可得知雖然最後結果影像疊合的位置不能完美的對齊，但是位置偏差不大，因此透過本實驗可以得到一個結論是固定 C 與 P 的相對位置下，任何位置只要校正一次攝影機 C 跟投影機 P 的影像，最後的失真影像都能校正。

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 110cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 80cm)



(a) 攝影機取像

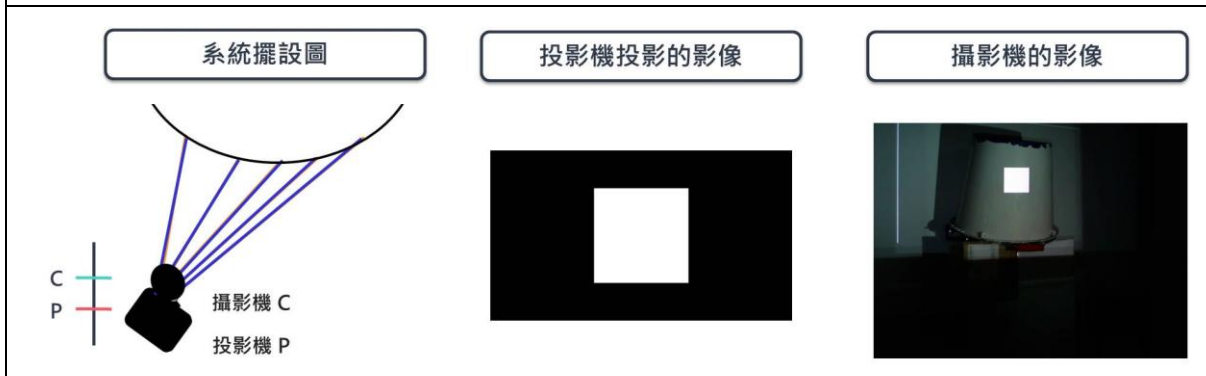


(b) 校正模板與校正後的結果示意

$$H_{scale} = \begin{bmatrix} 1.980198012, & 0, & -831.08910891; \\ 0, & 2.04081633, & -60; \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

(c) H_{scale} 的實際數據

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 89cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 80cm)



(d) 不同位置下之套用(a)之攝影機取像

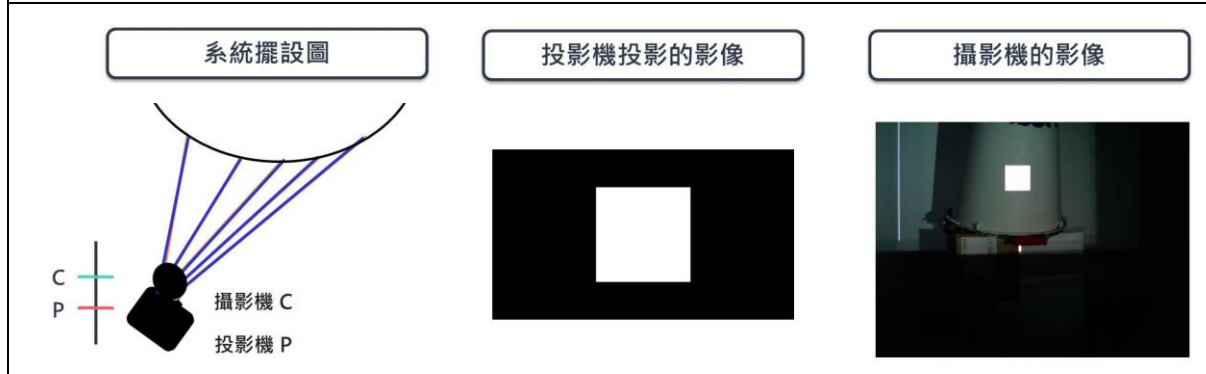


(e) 校正模板與校正後的結果示意

$$H_{\text{scale}} = \begin{bmatrix} 1.98019802, & 0, & -831.08910891; \\ 0, & 2.06185567, & -65.15463918; \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

(f) H_{scale} 的實際數據

投影機 P(高度 120cm，距離屏幕 89cm)，P' (高度 118cm，距離屏幕 80cm)



(g) 不同位置下之新的攝影機取像



(h) 校正模板與校正後的結果示意

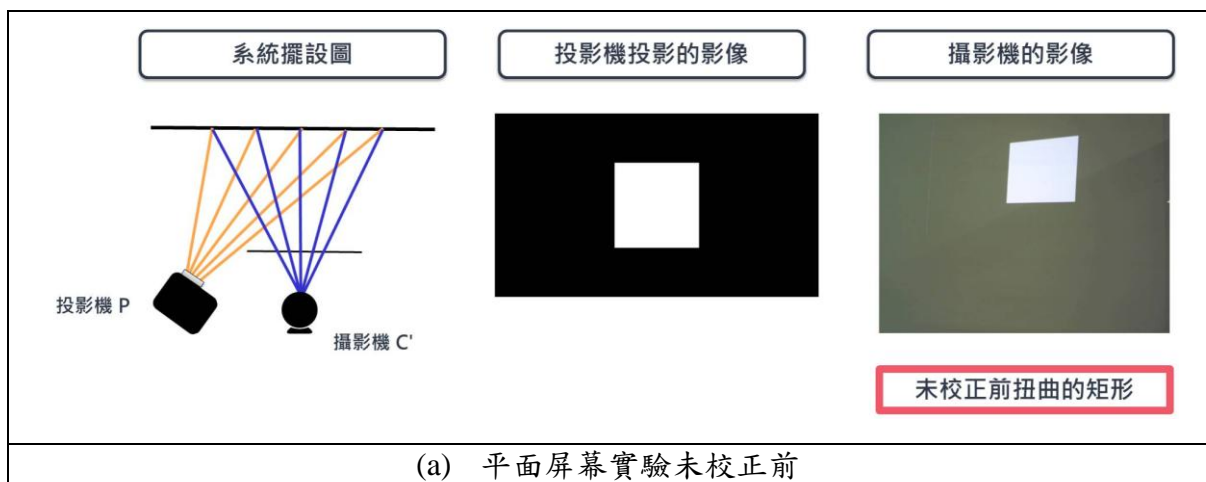
$$H_{scale} = \begin{bmatrix} 1.96078431, & 0, & -806.66666667; \\ 0, & 2.04081633, & -51.83673469; \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

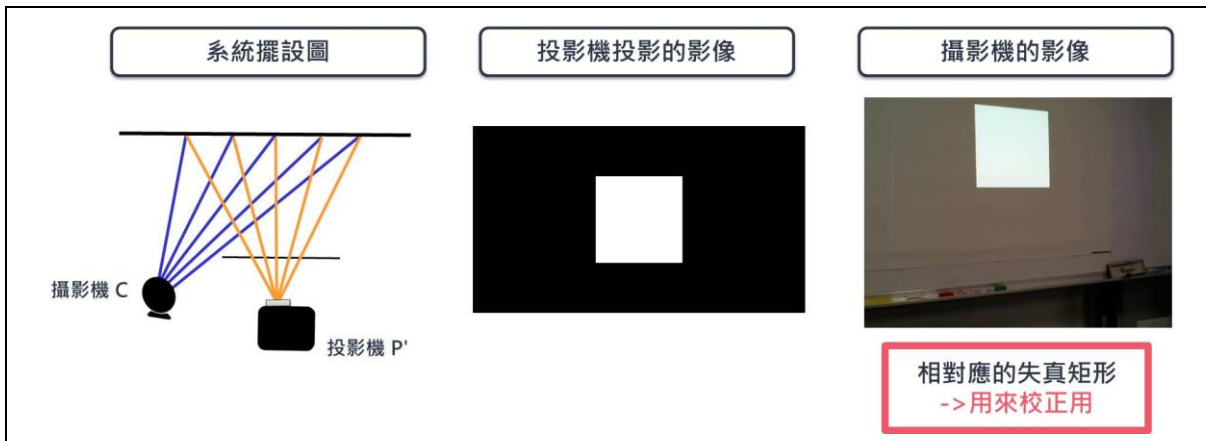
(i) H_{scale} 的實際數據

圖 5.4：曲面校正時比較不同的投影位置下使用相同的 H_{scale} 的投影校正效果比較

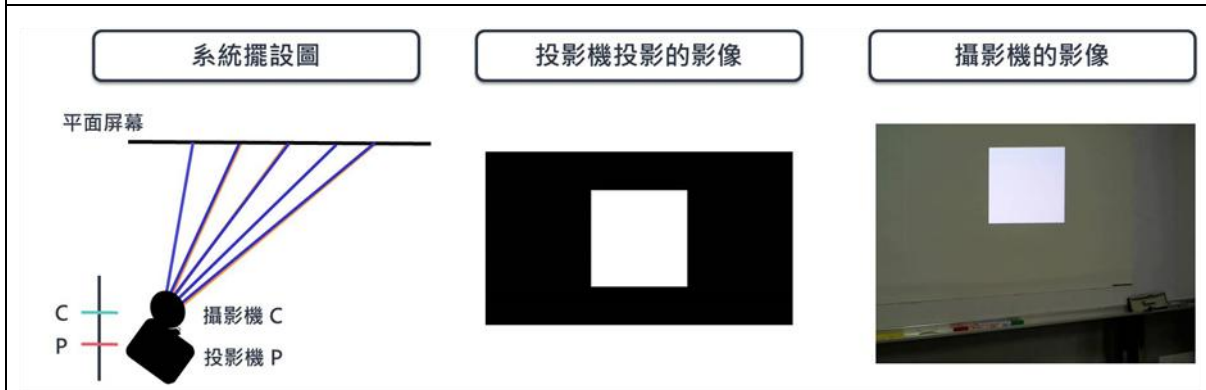
第二節、自動化斜面投影校正結果

本小節將介紹自動化斜面投影校正流程應用，並展示其影像結果，如圖 5.5 所示，(a)當投影標準模板(ST)時，攝影機影像(CI)中可以看出這時的投影畫面呈現一個梯形失真，希望透過後續的校正流程能夠將這樣的失真進行校正，(b)基於本論文的系統架設下，透過投影機 P' 投影 ST，使得攝影機 C 取得一張包含相對應失真矩形的 CI，藉此取得相關的校正資訊，(c)透過同向投影取像的方式，投影機 P 投影一張標準模板(ST)而攝影機 C 經由取像得到一張攝影機影像(CI)，(d)經由自動化斜面投影校正的處理後，得到一張校正模版(CT)的影像，經由投影機 P 得再次投影，使得觀看者看到一個近似標準矩形的畫面(CCI)。(e)基於上述的實驗結果為框架，我們將 ST 替換成實際投影的彩色影像(II)，經由本論文之投影影像可逆性原理的自動化斜面校正技術處理後，就左上的攝影機結果圖的示意若今天與從正向投影相同的影像疊合時，從攝影機影像中可以看出投影區域的失真不只能夠被校正且幾乎能對齊原本的位置，(f)可知 $H_{homography}$ 與 H_{scale} 的實際數據。

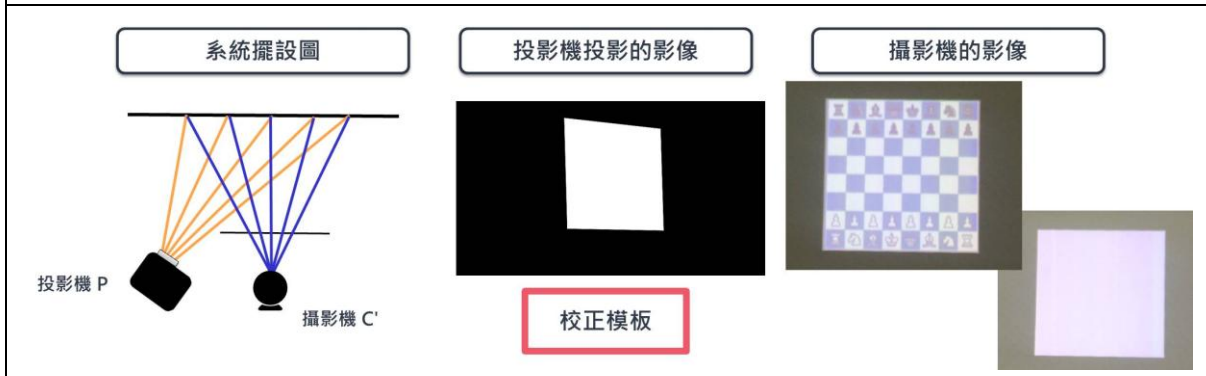




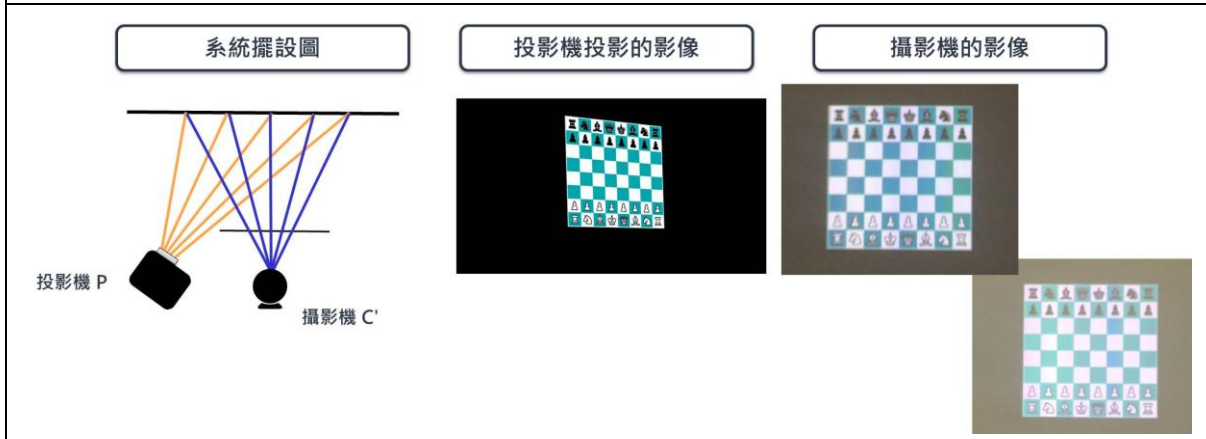
(b) 基於可逆性原理之取得校正資訊的影像



(c) 基於可逆性原理之取得自相似比例計算的影像



(d) 平面屏幕校正後



(e) 實際投影彩色影像校正前後的比較

$$H_{\text{homography}} = [0.65316439, 0.00560725, 402.92200850; \\ 0.05697468, 0.59626198, -82.42895711; \\ 0.00010654, -0.00000869, 1]$$

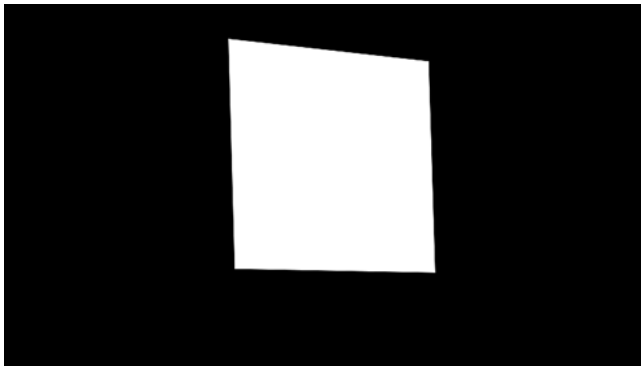
$$H_{\text{scale}} = [2.25004744, 0.01567372, -1039.10878375; \\ 0.07361801, 2.18722720, -146.92573478; \\ 0.00009623, 0.00000129, 1]$$

(f) $H_{\text{homography}}$ 與 H_{scale} 的實際數據

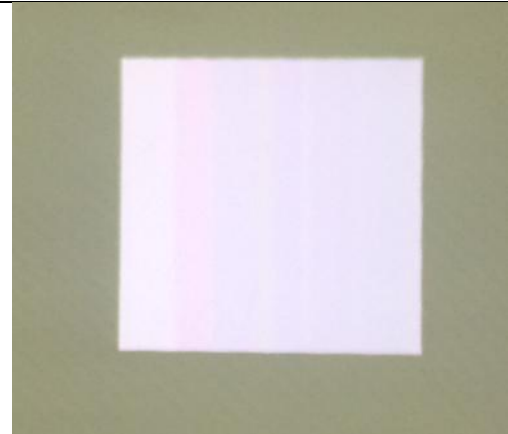
圖 5.5：自動化斜面投影校正成果

於投影影像可逆性的定理描述時，我們曾經敘述過在可逆性的適用範圍下，對就是任意投影位置下的投影失真都能經過本定理作校正，如圖 5.6 所示，就攝影機 C 與投影機 P 的鏡頭擺放位置皆平行的設置下，不同投影位置之下的 CT、校正結果與實驗數據作比較，由(a)跟(d)可知，雖然 CT 在不同投影位置下呈現不一樣，但從(b)跟(e)來看，最後的影像皆能夠校正，由(c)與(f)可知，在不同投影位置下造成失真形變 $H_{\text{homography}}$ 的係數呈現不同，而由於在攝影機 C 與投影機 P 的相同架設下做實驗，因此的 H_{scale} 的係數差異不大。

投影機 P(高度 120 cm，距離屏幕 110 cm)，P'(高度 118 cm，距離屏幕 113 cm)



(a) 校正模板



(b) 校正後攝影機的影像

$$H_{\text{homography}} = [0.65316439, 0.00560725, 402.92200850; \\ 0.05697468, 0.59626198, -82.42895711; \\ 0.00010654, -0.00000869, 1]$$

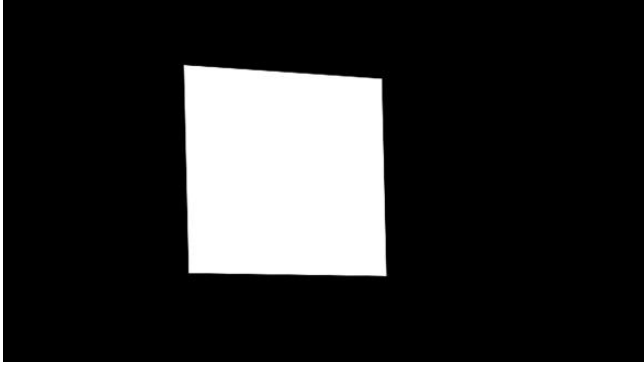
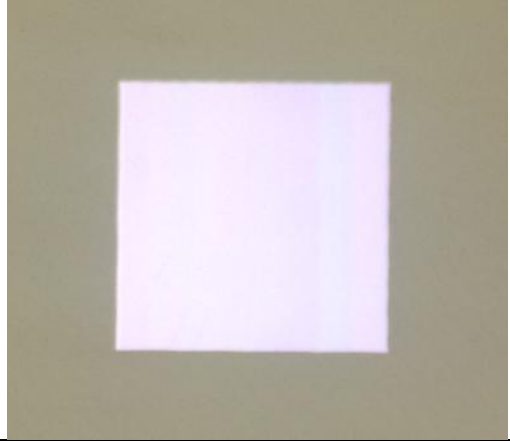
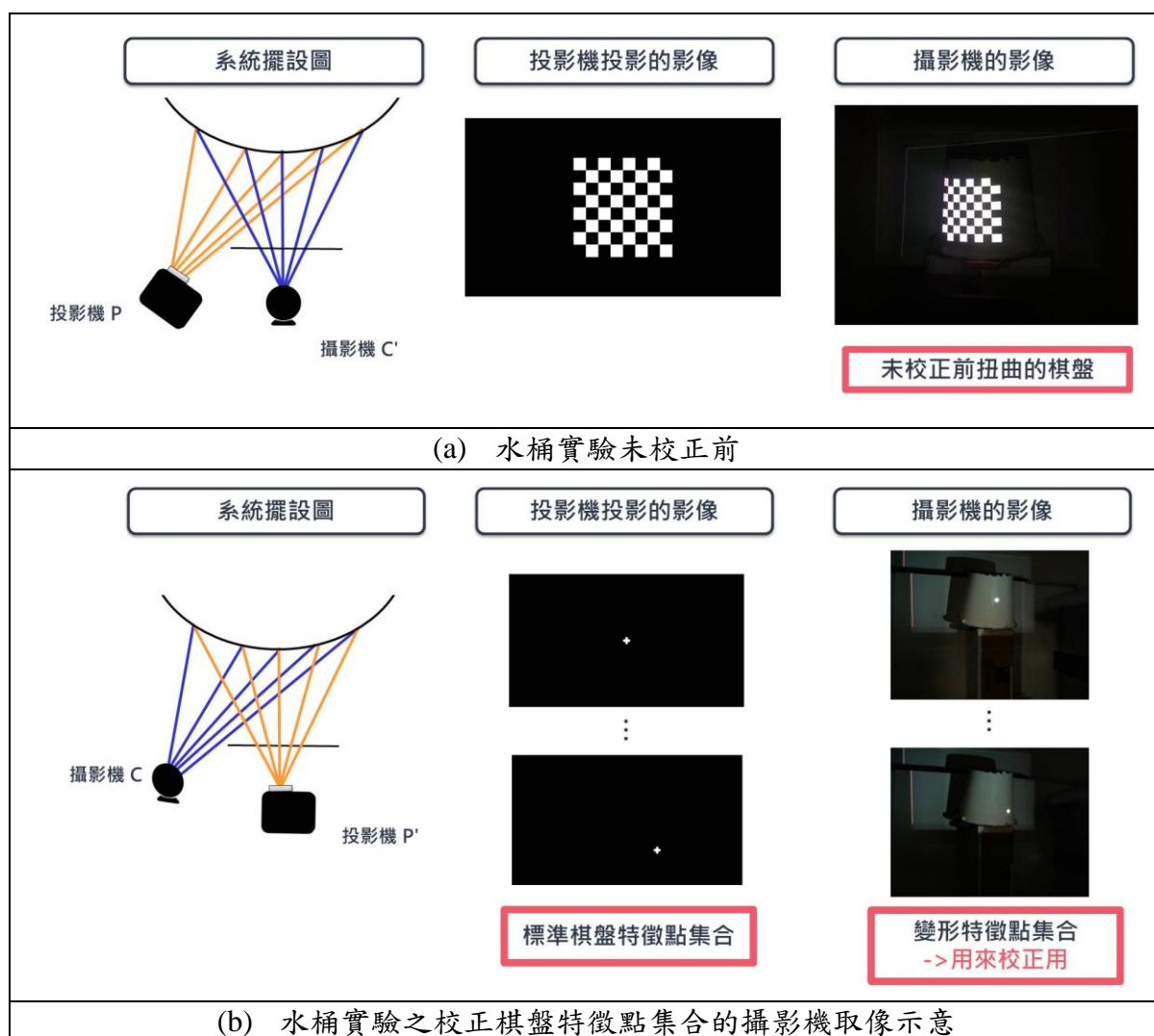
$H_{scale} = \begin{bmatrix} 2.25004744, & 0.01567372, & -1039.10878374; \\ 0.07361801, & 2.18722720, & -146.92573478; \\ 0.00009623, & 0.00000129, & 1 \end{bmatrix}$	
(c) $H_{homography}$ 與 H_{scale} 的實際數據	
投影機 P(高度 120 cm，距離屏幕 120 cm)，P'(高度 118 cm，距離屏幕 113 cm)	
	
(d) 校正模板	(e) 校正後攝影機的影像
$H_{homography} = \begin{bmatrix} 0.55389086, & 0.00801706, & 372.45107794; \\ 0.02936429, & 0.52008529, & -1.98341625; \\ 0.00004659, & -0.00000079, & 1 \end{bmatrix}$	
$H_{scale} = \begin{bmatrix} 2.25004744, & 0.01567372, & -1039.10878374; \\ 0.07361801, & 2.18722720, & -146.92573478; \\ 0.00009623, & 0.00000129, & 1 \end{bmatrix}$	
(f) $H_{homography}$ 與 H_{scale} 的實際數據	

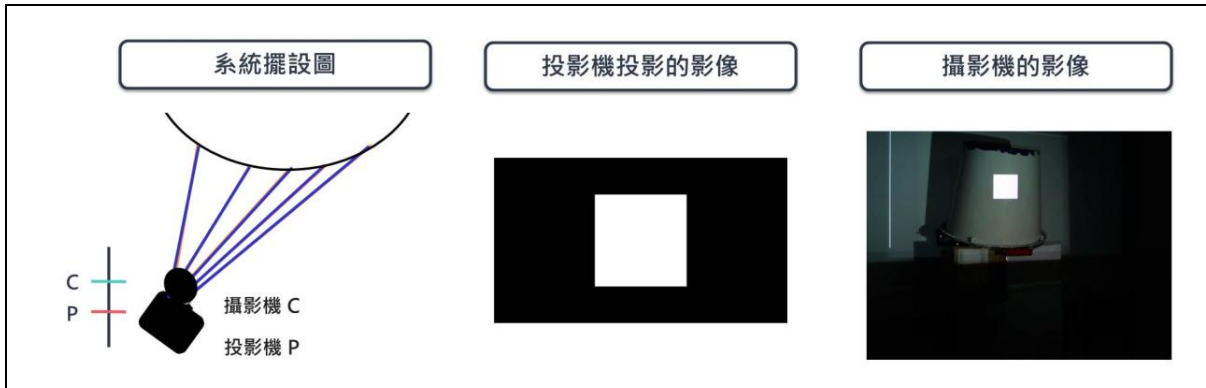
圖 5.6：自動化斜面投影在不同觀測點下的校正成果

第三節、自動化曲面投影校正成果

本小節將介紹自動化曲面投影校正流程應用，並展示其影像結果，如圖 5.7 所示，(a)可知當投影機投射一個棋盤狀的 ST 於曲面上時，這裡我們利用水桶來取代曲面進行應用，投影畫面都會因為投影表面的曲率不同而呈現不規則的失真，(b)可知透過本論文基於投影影像可逆性原理下，透過投影機 P' 投影一組標準棋盤特徵點的集合，經由攝影機 C 取得相對應的變形特徵點攝影機影像，藉此取得相關的校正資訊，(c)可知透過同向投影取像的方式，投影機 P 投影一張相同的 ST 而攝影機 C 經由取像得到一張攝影機影像(CI)，(d)可知經由自動化曲面投影校正的處理後，得

到一張 CT，經由投影機 P 得再次投影，使得觀看者看到一個近似標準棋盤格的畫面，就左上的攝影機結果圖的示意若今天與從正向投影相同的影像疊合。從(e)、(f)與(g)來看，基於上述的水桶實驗結果為框架，我們將 ST 替換成實際投影的任意彩色影像(II)，經由本論文之投影影像可逆性原理的自動化曲面校正技術處理後，就左上的攝影機結果圖的示意若今天與從正向投影相同的影像疊合時，從攝影機影像中可以看出投影區域的失真不只能夠被校正且幾乎能對齊原本的位置，且畫面間連續無空洞，(h)可知 H_{scale} 的實際數據，而因為 $H_{homography}$ 過多，這邊不加贅述。





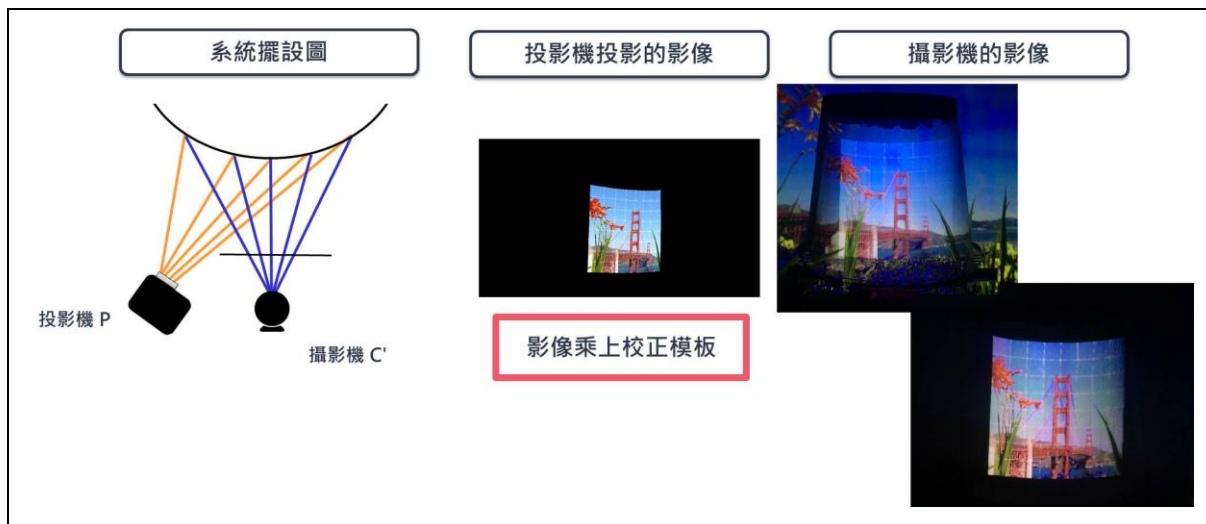
(c) 基於可逆性原理之取得自相似比例計算的影像



(d) 水桶實驗校正後-校正模板



(e) 自動化曲面投影校正成果-彩色棋盤影像



(f) 自動化曲面投影校正成果-彩色風景影像(亮度高)



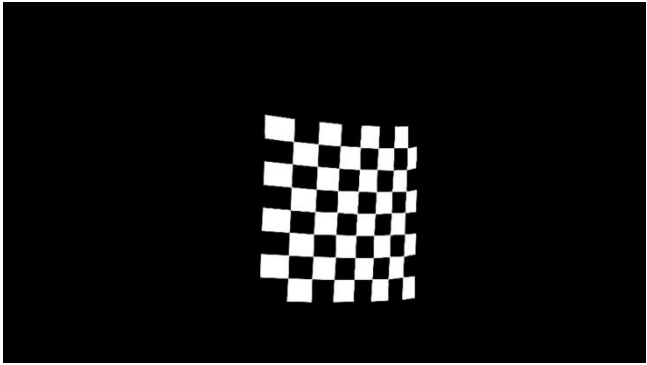
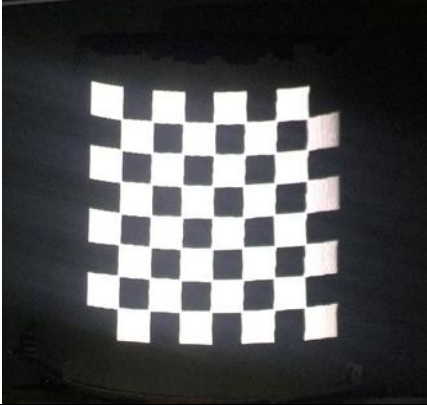
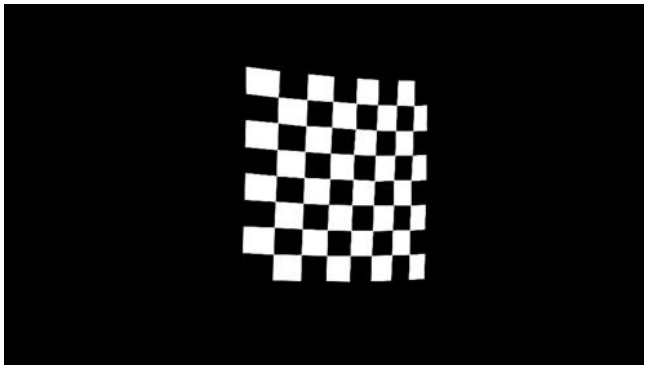

(g) 自動化曲面投影校正成果-彩色風景影像(亮度低)

$$H_{\text{scale}} = \begin{bmatrix} 1.98019802, & 0, & -831.08910891; \\ 0, & 2.04081633, & -60; \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

(h) H_{scale} 的實際數據

圖 5.7：自動化曲面投影校正成果

曲面投影校正時，對於任意觀測點 B 的投影失真都能經過可逆性原理作校正，如圖 5.8 所示，就攝影機 C 與投影機 P 的鏡頭擺放位置皆平行的設置下，不同 B 點之下的校正模板、校正結果與實驗數據作比較，由(a)跟(d)可知，雖然 CT 在不同投影位置下呈現不一樣，但從(b)跟(e)來看，最後的影像皆能夠校正，由 (c)與(f)可知，在不同投影位置下造成失真形變 $H_{\text{homography}}$ 的係數呈現不同，因為這邊網格數目眾多，因此這邊就取幾個數值作代表，因為在攝影機 C 與投影機 P 的相同架設下做實驗，從(d)跟(h)可知 H_{scale} 的係數差異不大。

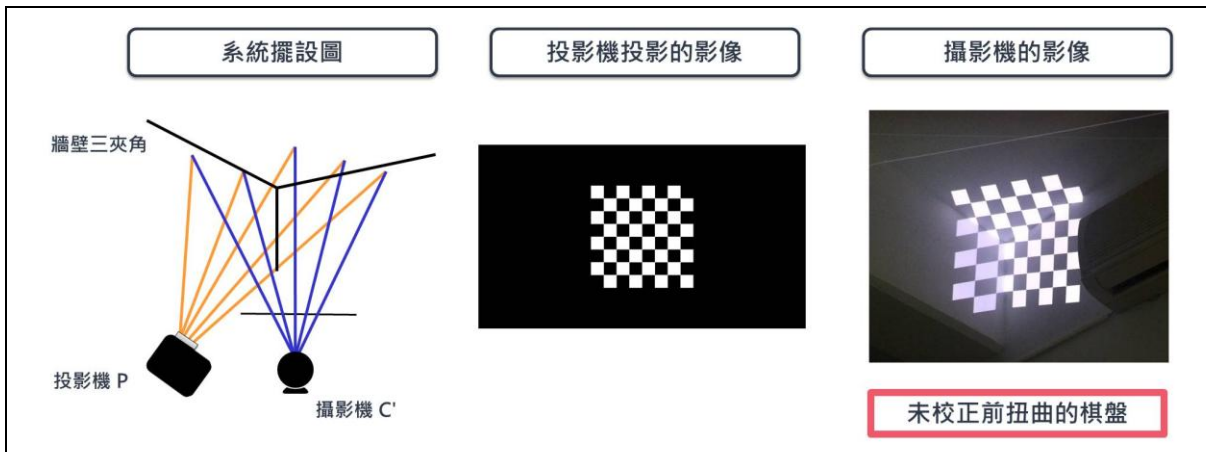
投影機 P(高度 120 cm，距離屏幕 100 cm)，P'(高度 118 cm，距離屏幕 80 cm)	
	
(a) 校正模板	(b) 校正後攝影機的影像
$H_{11} = [1.16647188, -0.01026399, 211.97016362;$ $0.15115496, 0.65384986, -110.01828681;$ $0.00037811, 0.00000687, 1]$ $H_{22} = [1.09395878, -0.00921556, 271.59631045;$ $0.14193950, 0.67556091, -108.45919894;$ $0.00039056, 0.00000831, 1]$	
(c) $H_{\text{homography}}$ 的實際數據	
$H_{\text{scale}} = [1.980198012, 0, -831.08910891;$ $0, 2.04081633, -60;$ $0, 0, 1]$	
(d) H_{scale} 的實際數據	
投影機 P(高度 120 cm，距離屏幕 89 cm)，P'(高度 118 cm，距離屏幕 80 cm)	
	
(e) 校正模板	(f) 校正後攝影機的影像

$H_{11} = \begin{bmatrix} 0.68651163, & 0.17860465, & 309.58139535; \\ 0.08546512, & 0.57302326, & -72.99534884; \\ -0.00003876, & 0.00023256, & 1 \end{bmatrix}$
$H_{22} = \begin{bmatrix} 0.26451510, & -0.01459459, & 488.02861685; \\ 0.00160042, & 0.40851086, & 2.43243243; \\ -0.00024907, & -0.00000530, & 1 \end{bmatrix}$
(g) $H_{\text{homography}}$ 的實際數據
$H_{\text{scale}} = \begin{bmatrix} 1.96078431, & 0, & -806.66666667; \\ 0, & 2.04081633, & -51.83673469; \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$
(h) H_{scale} 的實際數據

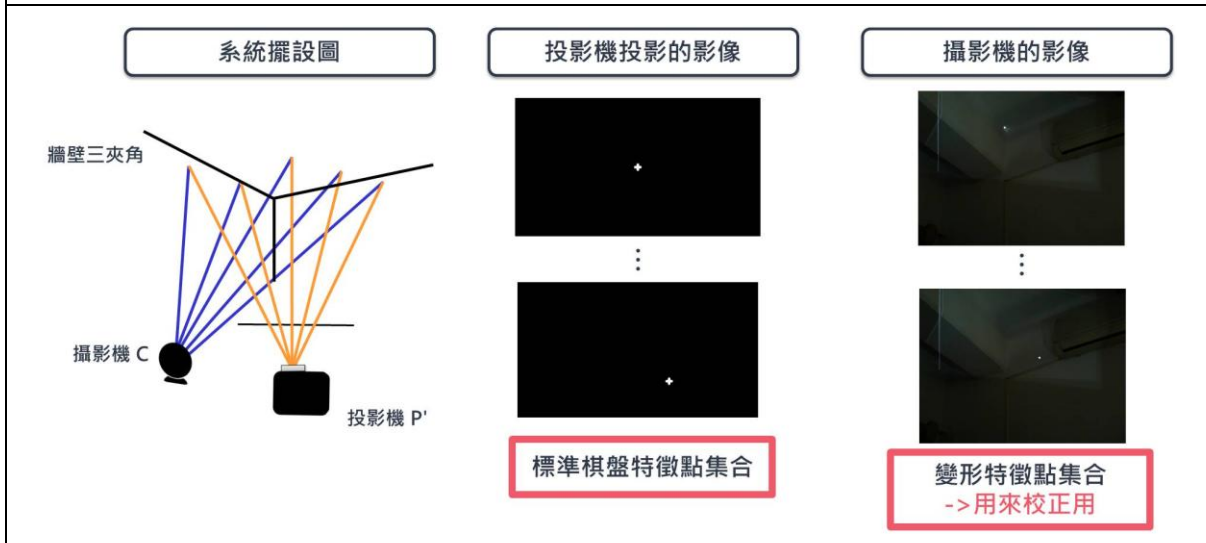
圖 5.8：自動化曲面投影在不同觀測點下的校正成果

第四節、牆壁三夾角之近似校正

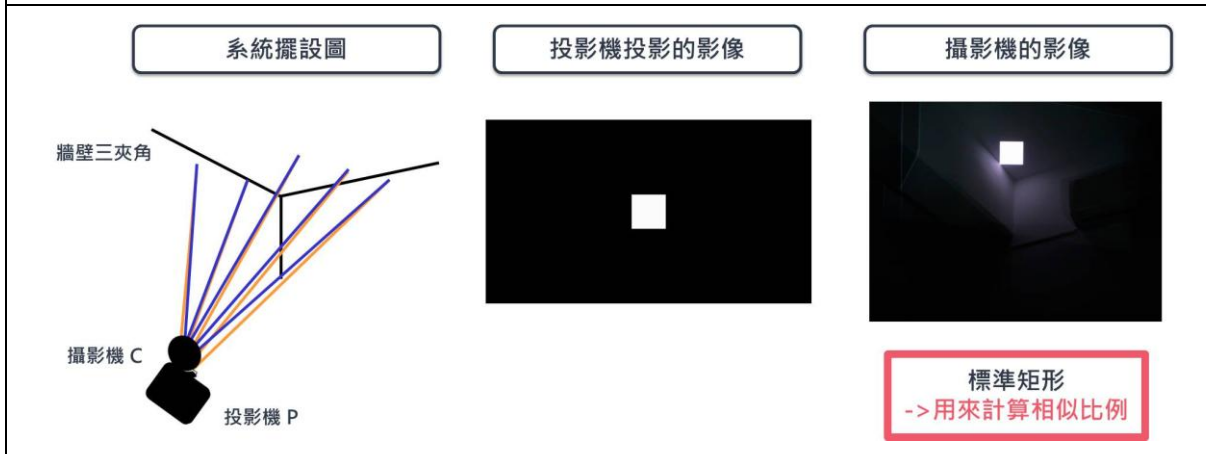
本論文中，基於可逆性原理下延伸出斜面與曲面的投影失真校正，為了加強曲面投影校正的應用強度，針對隨意一個牆壁三夾角處的不規則投影失真進行校正。如圖 5.9 所示，(a)可知當投影機投射一個 ST 於牆壁三夾角這樣的不規則投影面上時，投影畫面都會因為隨著不同方向的牆面而呈現不規則的失真，(b)可知透過本論文基於投影影像可逆性原理下，透過投影機 P' 投影一組標準棋盤特徵點的集合，經由攝影機 C 取得相對應的變形特徵點攝影機影像，藉此取得相關的校正資訊，(c)可知透過同向投影取像的方式，投影機 P 投影一張標準模板 ST 而攝影機 C 經由取像，(d)可知經由自動化曲面投影校正對於不規則面的校正前處理後，得到一張 CT，經由投影機 P 得再次投影，使得觀看者看到一個近似標準棋盤格的畫面。(e)透過放大校正模板，我們可以看到在每個平面相接夾角上的棋盤格變形情況，可以看出在每個牆面接縫處上的網格扭曲變形，從(f)、(g)與(h)可知，我們將標準模板(ST)的影像替換成實際投影的任意彩色影像(II)，經由本論文之投影影像可逆性原理的自動化曲面校正技術處理後，由結果影像中可以看出校正的結果與投影棋盤格時相似，另外，就左上的攝影機結果圖的示意若今天與從正向投影相同的影像疊合時，從攝影機影像中可以看出投影區域的失真不只能夠做到近似的校正並且幾乎能對齊原本的位置，且畫面間連續無空洞。



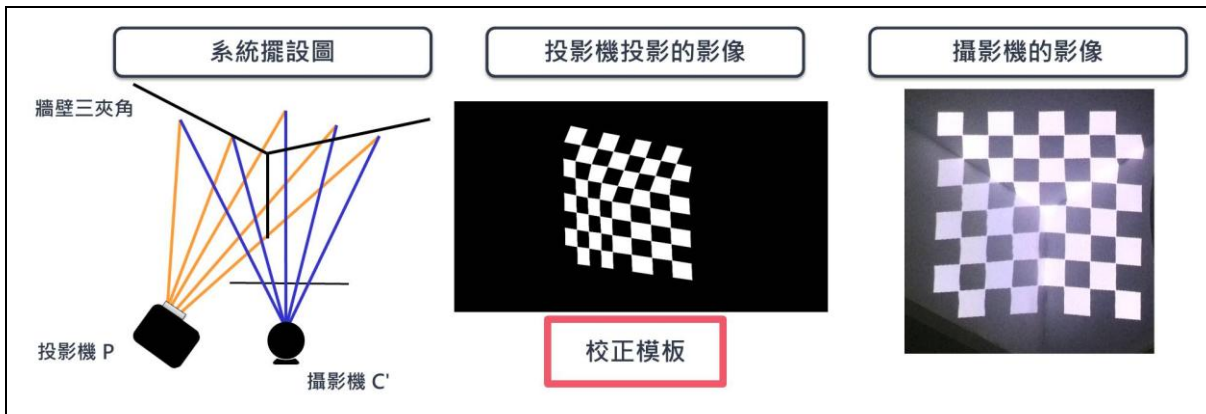
(a) 牆壁三夾角實驗未校正前



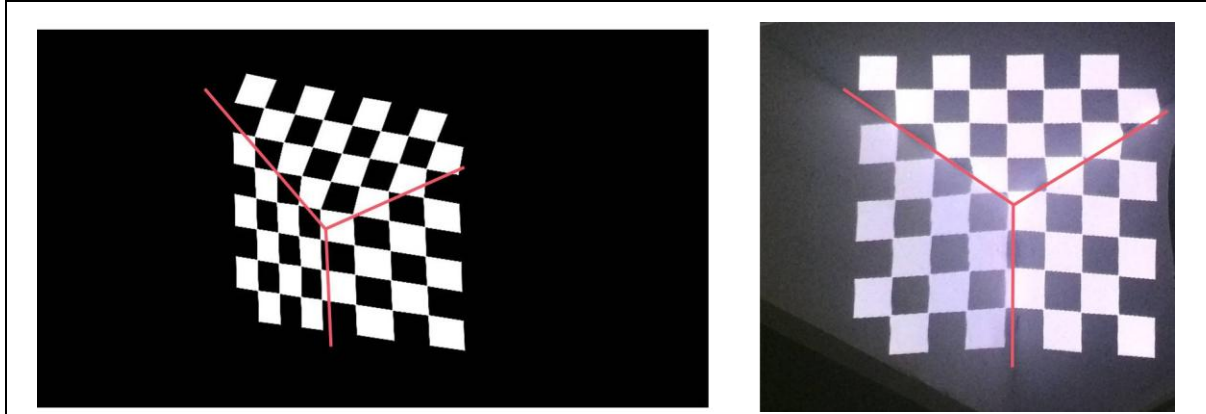
(b) 牆壁三夾角實驗之校正棋盤特徵點集合的攝影機取像示意



(c) 基於可逆性原理之取得自相似比例計算的影像



(d) 牆壁三夾角實驗校正後



(e) 放大校正模板



(f) 牆壁三夾角實驗校正後之標準棋盤影像替換成彩色棋盤影像

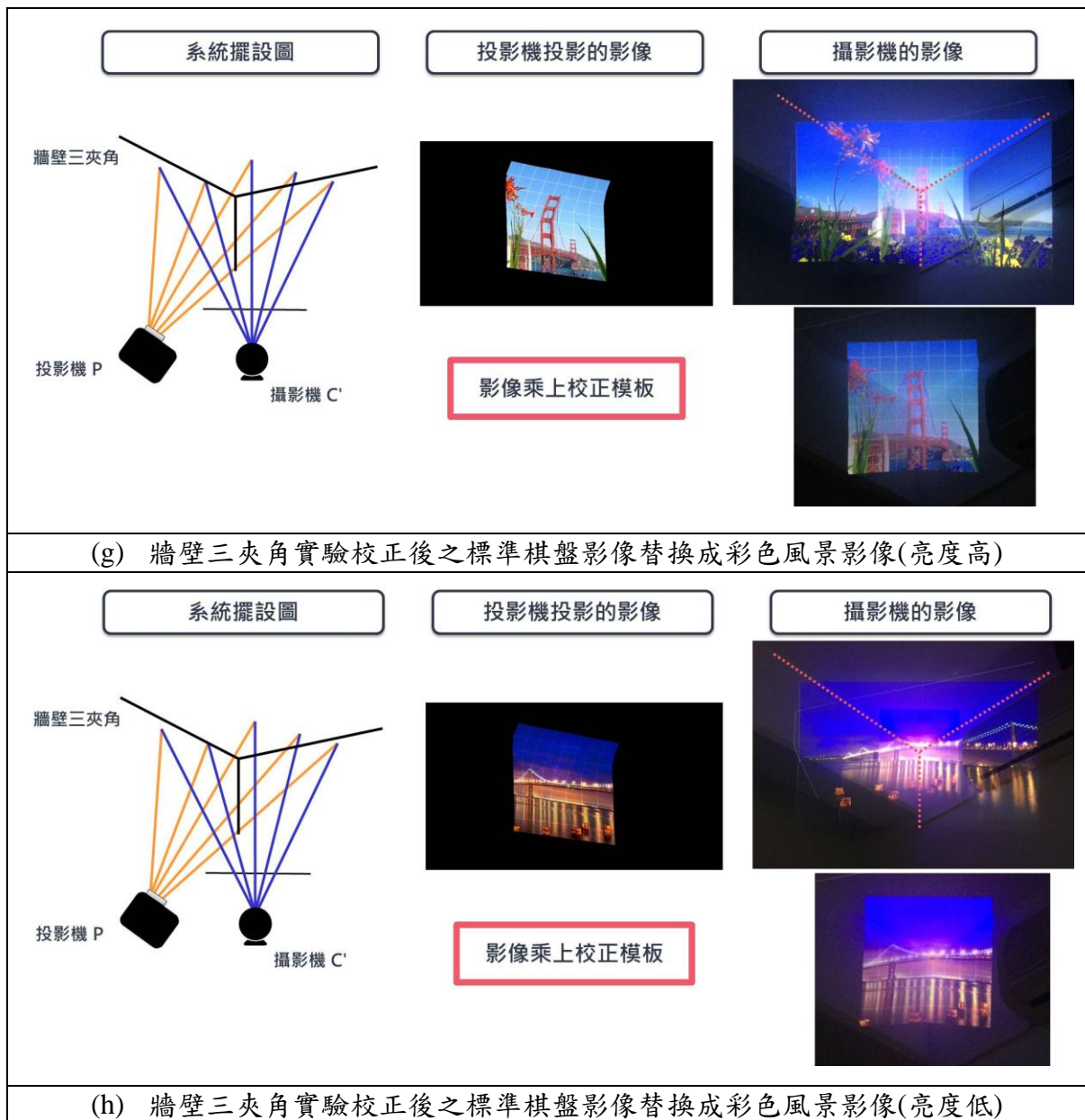


圖 5.9：自動化曲面投影校正於牆壁三夾角的校正結果

如圖 5.10 所示，最後就牆壁三夾角的實驗結果圖中探討造成畫面中誤差原因，第一個原因，由於網格不夠密，導致針對這樣的不規則投影失真無法進行有效地近似的投影校正。另外，在我們的技術中將投影機 P' 所正投影的影像當作是在當下位置下觀看者所觀看到的影像，但是我們在採集最後校正的結果影像時，無法在投影機 P' 的鏡頭位置上拍攝，因此拍攝照片時位置的誤差導致所看到的畫面會有變形。

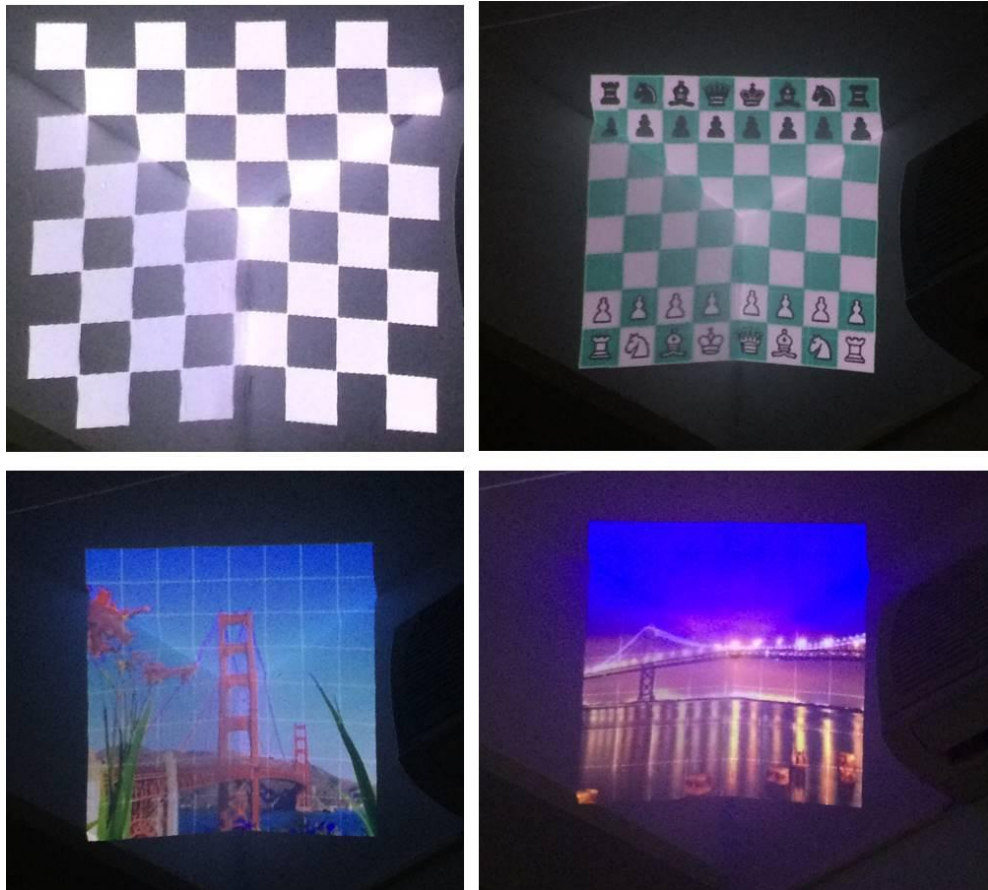


圖 5.10：牆壁三夾角實驗校正後之任意投影影像之近似校正的結果

第六章、結論與未來發展方向

本章節的內容主要針對依可逆性原理所實現校正技術與文獻方法作比較，並探討基於相同的投影校正步驟之下，可逆性原理直接計算逆轉換與一般文獻上所使用的計算方法之演算法效能分析，並延伸出本論文未來的發展與改良方向。

第一節、依可逆性原理所實現校正技術與文獻方法比較

表 6.1：依可逆性原理所實現之斜面投影校正與文獻方法比較

斜面校正	沈駿寧[8]-攝影機/投影機型式之擴增實境應用平台的設計與實作	基於可逆性原理的斜面投影失真校正技術
投影校正方法比較	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用直線偵測計算出失真區域的特徵點。 2. 計算投影失真前後的轉換矩陣 T_1。 3. 利用直線偵測計算出失真區域之最大內接矩形(MIR)與其四個特徵點，以求校正後最大顯示效果。 4. 利用 T_1 的逆轉換乘上 MIR 的四個特徵點以求一個經由處理過的影像(WI)。 5. 利用 II 與 WI 之間的計算出轉換矩陣 T_2，預處理欲投影的影像。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用邊緣與角點偵測出失真區域的特徵點。 2. 座標平移補償影像間因解析度不同而造成區域位移的問題。 3. 基於可逆性原理的實驗架設下直接計算失真前後逆轉換矩陣 $H_{\text{homography}}$。 4. 攝影機同向拍攝，進行攝影機校正計算出 H_{scale}。 5. ST 乘上 $H_{\text{homography}}$ 與 H_{scale} 與得到一個 CT，CT 乘上欲投影影像作預處理。
優缺點比較	<p>單攝影機/攝影機系統</p> <p>間接計算逆轉換容易有計算誤差校正後最大顯示效果，但畫面比例有時會比例失衡。</p>	<p>雙攝影機/攝影機系統，須作座標平移與攝影機的校正。</p> <p>直接計算逆轉換，誤差值較小。校正後畫面比例不會失衡。</p>

從表 6.1 可知，依可逆性原理所實現之斜面投影校正與沈駿寧的論文作校正方法的比較，從優缺點可以知道校正方法的差異，本論文的方法中需要多一台投影機作為校正裝置，並且還要經過其他的校正步驟，但應用可逆性原理於投影校正時有個最大的好處，由於簡化後續對於影像處理上的計算，因此因為計算所造成的誤差問題較小。

表 6.2：依可逆性原理所實現之曲面投影校正與文獻方法比較

曲面校正	沈駿寧[8]-攝影機/投影機型式之擴增實境應用平台的設計與實作	基於可逆性原理的曲面投影失真校正技術
投影校正方法比較	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用直線組偵測失真區域中特徵點並排序分割曲面的不規則失真區域。 2. 計算區塊間的轉換矩陣 $H_{2 \text{ hi hj}}$。 3. 利用直線偵測計算出失真區域之最大內接矩形(MIR)與其四個特徵點，以求校正後最大顯示效果，並計算出 Π 與 MIR 之間的轉換矩陣 H_1。 4. 欲投影的影像每個像素座標乘上 H_1，並經由區塊間的分割乘上相對應 $H_{2 \text{ hi hj}}$ 的逆轉換，得到一張處理過後的影像(WI)。 5. 由於計算誤差造成 WI 的畫面間空洞不連續，須再經過一步影像修正。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用邊緣與角點偵測出失真區域的特徵點。 2. 座標平移補償影像間因解析度不同而造成區域位移的問題。 3. 以時序掃描棋盤的特徵點，影像處理的同時進行偵測與排序，基於可逆性原理的實驗架設下直接計算區塊間失真前後逆轉換矩陣 $H_{\text{homography ij}}$。 4. 攝影機同向拍攝，進行攝影機校正計算出 H_{scale}。 5. ST 乘上 $H_{\text{homography ij}}$ 與 H_{scale} 得到一個 CT，CT 乘上欲投影影像作預處理。
優缺點比較	<p>單攝影機/攝影機系統 間接計算逆轉換容易有計算誤差，且需要反轉換修正畫面。 校正後最大顯示效果，但畫面比例有時會比例失衡。</p>	<p>雙攝影機攝影機系統，須作座標平移與攝影機的校正。 直接計算逆轉換，誤差值較小，且校正後畫面連續不須經過修正。 校正後畫面比例不會失衡。</p>

從表 6.2可知，依可逆性原理所實現之曲面投影校正與沈駿寧的論文作校正方法的比較，從優缺點可以知道校正方法的差異，與斜面投影校正相同，本論文的方法中需要多一台投影機作為校正裝置，而且需經過其他的校正步驟，但是應用可逆性原理於投影校正時有個最大的好處，由於簡化後續對於影像處理上的計算，另外就因此因為計算所造成的誤差問題較小，特別是在最後的校正出來的影像上，區塊之間的相接連續且沒有空洞，因此不須再進一步作修正的動作。

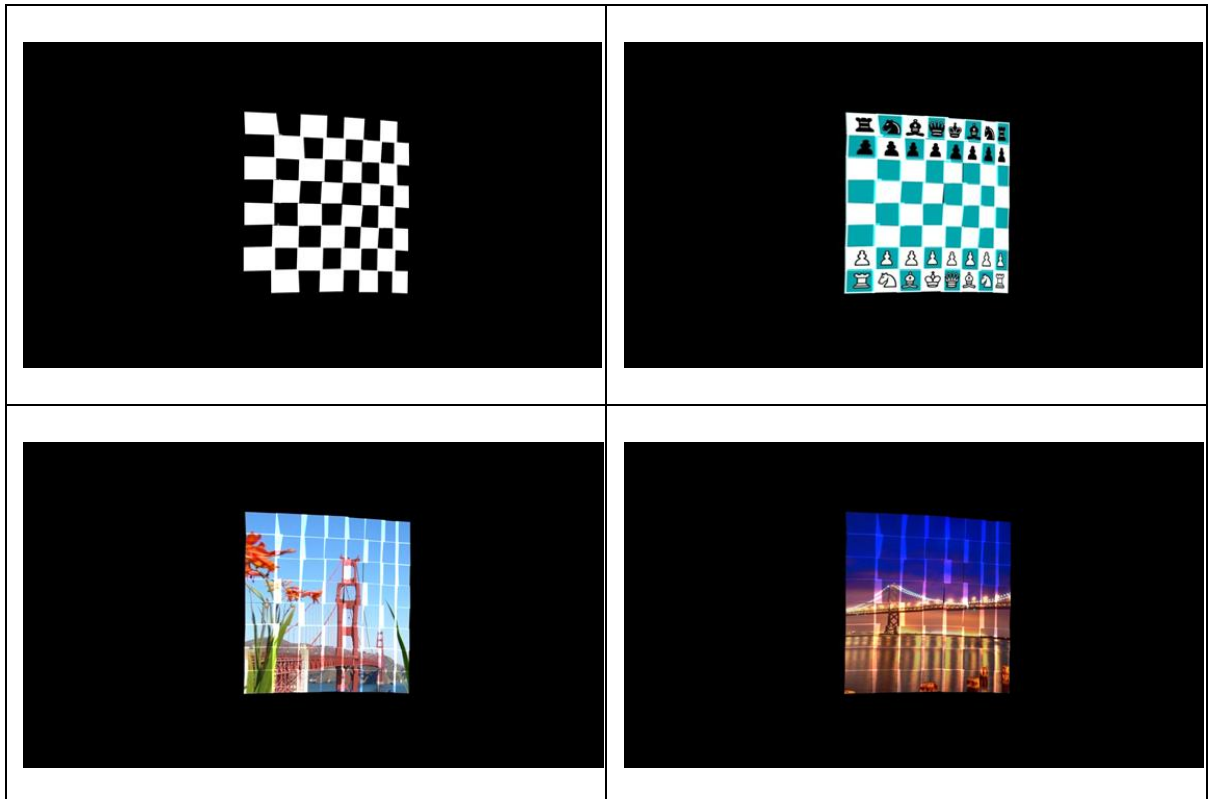
表 6.3：依可逆性原理計算矩陣方法與傳統計算矩陣方法之效能分析比較

步驟	Warping 與合成
本論文可逆性原理計算矩陣方法	
執行時間(s)	24.137
影像數(frame)	64
Fps	2.652
時間複雜度	$O(n^2)$
傳統計算矩陣方法	
執行時間(s)	38.772
影像數(frame)	64
Fps	1.651
時間複雜度	$O(n^2)$

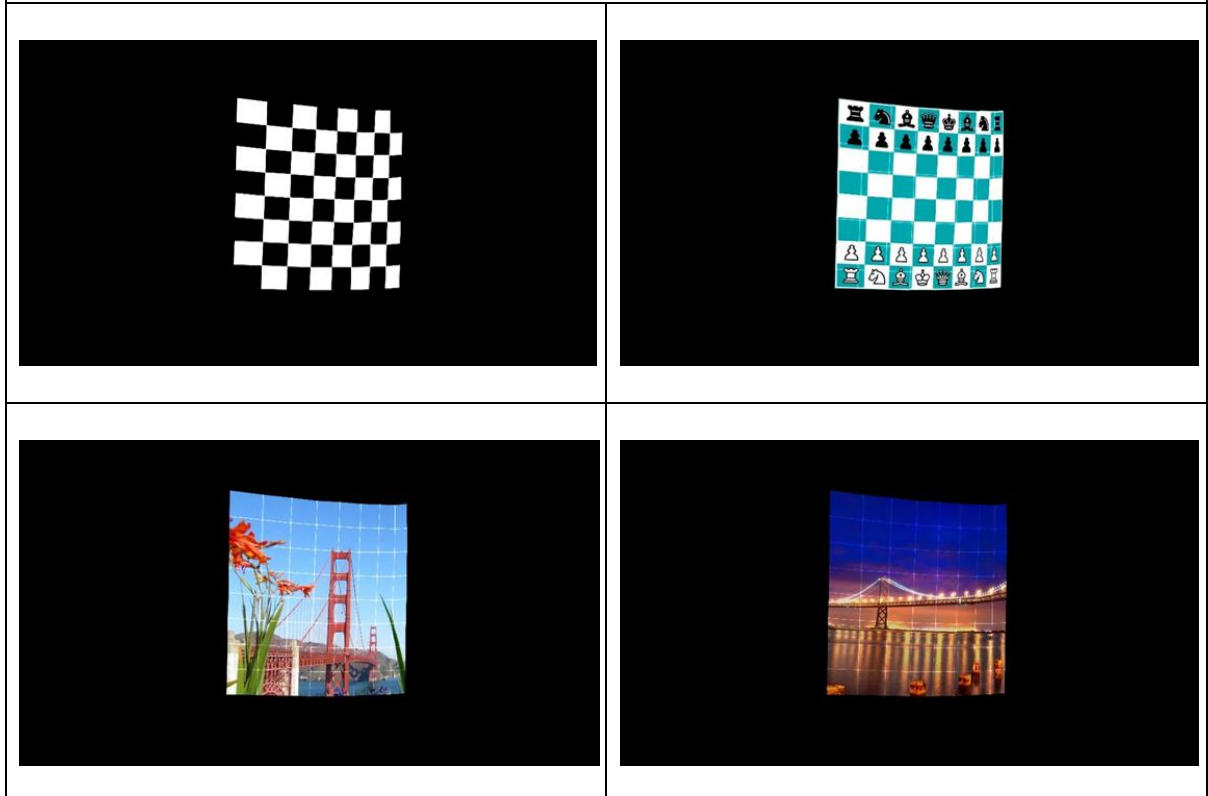
從表 6.3 來看，在相同的演算法底下，比較本論文計算矩陣的方法與傳統計算從正轉換到逆轉換的方法，可以知道本論文以直接計算逆矩陣的方法效能較高且執行速度較快，雖然時間複雜度相同。

另外，若是使用傳統計算矩陣的方法時，特別在曲面投影校正的計算過程中，會因為計算誤差導致畫面產生空洞，也就是不連續的現象出現，這是因為電腦在做影像處理時，是以採樣的方式進行取點的處理所造成的誤差。

如圖 6.1 所示，由(a)可知，一般文獻的方法：因為上述的誤差問題導致還要多一步利用內插法或其他方式進行畫面的補點，讓投影之後的畫面能夠呈現連續的狀態。由(b)可知，本論文的方法：與現有文獻是以間接計算出逆轉換的方法不同，基於可逆性原理的系統架構下，我們針對攝影機影像中連續的棋盤格作特徵點擷取，直接計算出區塊之間的逆轉換來作為校正模版，結果使得欲投影的影像經過校正模版的處理後，無空洞且連續，有效解決校正用畫面空洞不連續的問題。



(a) 傳統計算矩陣方法的影像結果



(b) 本論文可逆性原理計算矩陣方法的影像結果

圖 6.1：影像結果比較

第二節、改良的方向

根據本論文中的技術展示成果，我們探討下列改善的方向：

1. 由於在特徵點偵測的地方需要使用大量的影像處理以及演算法的排序，因此針對計算上的數據存取方式能夠再更有效率些，程式在效能處理還要再優化，以及針對每次所投射的點數目可以改成更有效率的投射方式，例如一次一排等。
2. 在曲面或不規則面校正時，目前只能針對固定不動的使用者做影像上的視覺校正，希望未來能夠增加到在利用體感偵測器偵測觀看者的觀點位置時，除了可以計算出適當的影像顯示內容外，也能針對不同視角的觀點進行投影影像的即時校正。
3. 將目前的技術延伸到與實景無接縫結合之擴增實境技術。希望可以使用一些特徵點比對的方式將投影後的虛擬畫面與實際的景物做結合，達到如圖 6.2 所示的與實景無接縫結合之擴增實境技術。

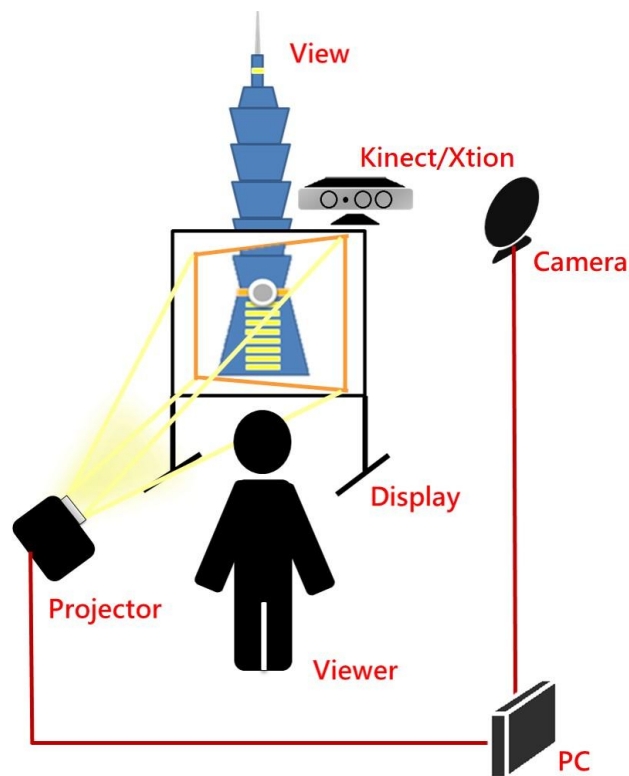


圖 6.2：與實景無接縫結合之擴增實境技術

4. 增強虛擬擴增實境的應用強度，希望能透過基於可逆性的曲面投影校正技術針對汽車AB柱這種不規則的投影表面進行失真校正，並搭配與實景無接縫結合、隨視角調整之互動式虛擬實境達到開車視線死角減消的效果，如圖 6.3 所示。

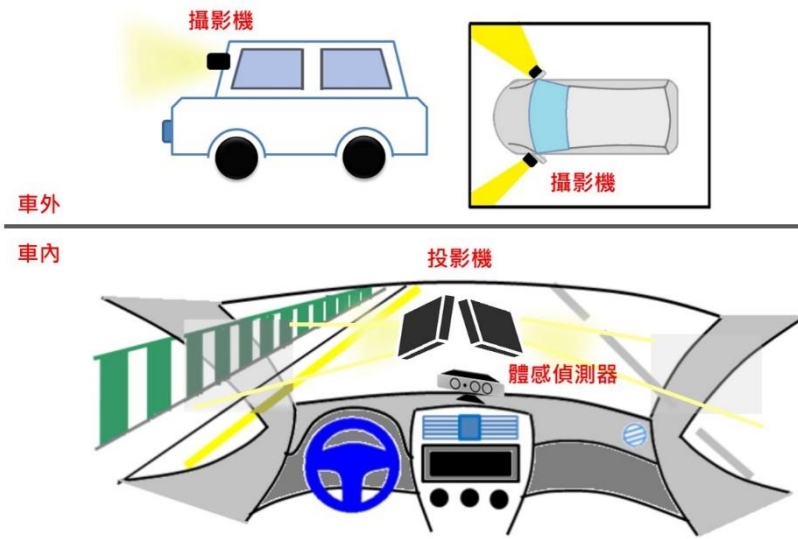


圖 6.3：車用 AB 柱視角減消示意

參考文獻

- [1] R. Raskar, M. S. Brown, R. Yang, W.-C. Chen, G. Welch, H. Towles, *et al.*, “Multi-projector displays using camera-based registration” *Proceedings of the IEEE Visualization Conference*, pp. 161-168, 1999.
- [2] Raji and M. Pollefeys, “Auto-calibration of multi-projector display walls,” in *Proceedings - International Conference on Pattern Recognition*, 2004, pp. 14-17.
- [3] M. Ashdown, M. Flagg, R. Sukthankar, and J. M. Rehg, “A flexible projector-camera system for multi-planar displays,” in *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2004, pp. II165-II172.
- [4] M. Brown, A. Majumder, and R. Yang, “Camera-based calibration techniques for seamless multiprojector displays,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 11, pp. 193-206, 2005.
- [5] B. Sajadi and A. Majumder, “Autocalibrating tiled projectors on piecewise smooth vertically extruded surfaces,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 17, pp. 1209-1222, 2011.
- [6] T. Susumu, I. Masahiko and U. Yuji, (2014, October 31). *Transparent car* [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=gDk5HdGfuVI#t=15>
- [7] 莊明穎，〈相機-投影機會議展示系統〉（國立中山大學資訊工程學系研究所碩士論文，2005）。
- [8] 沈駿騫，〈攝影機/投影機型式之擴增實境應用平台的設計與實作〉（銘傳大學資訊傳播工程學系碩士班碩士論文，2012）。
- [9] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, 2003.
- [10] Z. Zhang, “Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, 1999, pp. 666-673.
- [11] Z. Zhang, “A flexible new technique for camera calibration,” in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, pp. 1330-1334, 2000.
- [12] E. Dubrofsky, “Homography Estimation,” unpublished.
- [13] J. Denton and J. R. Beveridge, “Two dimensional projective point matching,” in *Image Analysis and Interpretation, 2002. Proceedings. Fifth IEEE Southwest Symposium on*, 2002, pp. 77-81.
- [14] R. Kooima. (2013). *Using Generic Image Processing Operations to Detect a Calibration*

Grid [Online]. Available: http://www.wedesoft.de/downloads/detect_grid.pdf.

- [15] R Laganière, *OpenCV 2 Computer Vision Application Programming Cookbook*, Packt, 2011.
- [16] D. H. Kenneth, *a Practical Introduction to Computer Vision with OpenCV*, Wiley, 2014.
- [17] McGraw-Hill and Sybil P. Parker, *McGraw-Hill Dictionary of Scientific and Technical Terms*, McGraw-Hill Education, 2002.

附錄、字彙表

中文	英文(全稱和縮寫)	定義/功用
梯形失真	Keystone Distortion	當投影機於斜向擺放對著一個平面屏幕投射一組棋盤格時，因為投影機與平面屏幕並非正交擺放則會造成投影畫畫面上的失真現象。
攝影機/投影機系統	Camera-Projector System	常見使用在投影失真的校正系統，攝影機作為感知工具取得投影機相關的投影資訊，經由影像處理技術做校正前處理，達到校正失真影像的目的。
投影影像可逆性原理/ 投影影像之間的反射性原理	Principle of reversibility of projected image	基於光線的反射可逆性，針對不同觀點下的失真圖像，只能要取得相對應之接收圖像，都可以經由投影影像可逆性原理校正回去。
輸入影像	Input Image(II)	任何一張想投影的影像。
標準模板	Standard Template(ST)	標準模版，通常為標準的矩形或黑白棋盤格影像。
輸出影像	Output Image(OI)	經過校正模版(CT)所處理過的影像。
攝影機影像	Camera Image(CI)	針對投影失真所拍攝的攝影機影像，代表觀看者看到的影像。
投影失真的區域	Distortion Region(DR)	攝影機影像(CI)中的投影失真區域。
校正模板	Correction Template(CT)	本論文中針對斜面投影失真校正或曲面投影失真校正，我們利用計算出一個具有反失真幾何資訊的四邊形或是棋盤狀的影像作為校正模版，進行投影前畫面的預處理。
扭曲影像	Warping Image(WI)	影像處理過程中經由 OpenCV warpPerspective()所處理過的影像。
經過校正後的攝影機影像	Corrected Camera Image(CCI)	投影失真區域(DR)經過校正後的攝影機影像，代表觀看者看到的影像。
透視轉換	Perspective Transform	透視投影是為了獲得接近真實三維物體的視覺效果而在二維的紙或者畫布平面上繪圖或者渲染的一種方法，通常使用在攝影機或是人眼成像上。
單應性矩陣	Homography matrix / H, H_{ij}	在平面幾何轉換中屬於一種透視轉換(Perspective Transform)，包含區域之間的幾何轉換與位移。敘述影像之間的幾何轉換關係。

世界座標	World Coordinate	真實世界中的三維座標系，座標表示為(X, Y, Z)，敘述物體在真實世界中的位置。
影像座標	Image Coordinate	攝影機成像後的二維座標系，以像素為單位，座標表示為(x, y)，主要描述影像中的像素座標位置。
攝影機矩陣	Camera Matrix	透過加入攝影機座標中一個維度 3x4 的攝影機矩陣，我們可以間接知道世界座標與影像座標之間的轉換關係。
開源型電腦視覺庫	OpenCV (Open Source Computer Vision Library)	是一個跨平台的電腦視覺庫，可用於開發即時的圖像處理、電腦視覺以及模式識別程式。
透視轉換函式計算	WarpPerspective()	OpenCV 中的透視轉換函式計算，可以透過這個函式將所計算好的 H 帶入，並設定好輸入影像，經由此函式處理後輸出一張經由 H 轉換後的影像。
直接線性轉換	Direct Linear Transformation, DLT	基本觀念為直接將座標儀量測之像點儀器座標轉換成實物空間座標，不必先將儀器座標轉換成影像平面座標，然後由影像平面座標再轉成實物空間座標。此解法實際上並不求解方位元素，而是解出參數，然而方位元素則隱含於各個轉換參數中。有了這些參數，則可建立系統座標系與實物空間座標系之線性關係式，轉換參數之求得，則需仰賴於足夠的控制點。
最小平方法	Least Square Method	經由計算、分析求得一條最佳逼近直線，使所有的實驗數據到此直線的鉛垂方向(或水平方向)距離的平方總和為最小。投影平面上一個點(x, y)具有兩個自由度，因此至少需要四組點以上的對應關係才能決定出一個 Homography Matrix。因此一般矩形具有四個頂點恰好可以求解一個 Homography Matrix，而當影像中具有更多對應點時，就以最小平方法(Least Square Method)求得最佳解。
區域質心	Mass point of projection region	利用 OpenCV findContour() 尋找邊圖影像中最大相連區塊內的區域質心，也就是擷取失真區域內的質心

		座標位置。
位移轉換的 Homography Matrix	$H_{\text{translate}}$	由於投影影像與攝影機影像的解析度不同，導致兩影像中的投影平面中心沒有對齊，使得產生一個平移的 $H_{\text{translate}}$ 。
自相似比例計算的 Homography Matrix	H_{scale}	針對用來觀察 CT 的攝影機 C 進行影像的校正，由於裝置設置攝影機 C 與投影機 P 兩者鏡頭平行於地面且同向朝著牆面擺放拍照取像，因此視覺上看起來像比例變換，實際上就是進行攝影機校正，將影像校正回應該在投影機 P 的鏡頭位置所看到的校正模板，後續我們透過自相似比例計算 H_{scale} 進行攝影機校正。
幾何轉換關係的 Homography Matrix	$H_{\text{homography}}$	由於攝影機與投影機的相對位置，使得看到的畫面因為 $H_{\text{homography}}$ 而造成梯形失真。
	$H_{\text{homography } i j}$	由於投影屏幕表面的不規則或是攝影機與投影機的相對位置，使得看到的畫面因為 $H_{\text{homography } i j}$ 而造成不規則失真。
[沈駿寧，2012]		
原始的圖像	The Input Image(II)	原始的圖像，投影前的影像。
由攝影機所看到的投影畫面範圍	The Uncorrected Image(UI)	由攝影機所看到的投影畫面範圍，通常為投影機投影失真的範圍。
經處理後扭曲的影像	The Warped Image(WI)	經處理後扭曲的影像，經過校正預處理後的影像。
存在於 UI 中的最大矩形	MIR	存在於投影失真區域中的最大內接矩形。
轉換矩陣與逆轉換的轉換矩陣	$T_1、T_1^{-1}$	II 到 UI 之間的對應矩陣與逆轉換的對應矩陣。
轉換矩陣	T_2	UI 到 MIR 之間的轉換矩陣。
	T_3	II 到 WI 之間的轉換矩陣。
	H_1	II 到 MIR 之間的轉換矩陣。
區塊間的對應矩陣與逆轉換矩陣	$H_{2 \text{ hi hi}}、H_{2 \text{ hi hj}}^{-1}$	II 到 UI 之間各區塊之間的轉換矩陣與逆轉換矩陣。